Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2021

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira
(Organizadores)



Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2021

Editora Chefe
Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Assistentes Editoriais
Natalia Oliveira
Bruno Oliveira
Flávia Roberta Barão
Bibliotecária
Janaina Ramos
Projeto Gráfico e Diagramação
Natália Sandrini de Azevedo
Camila Alves de Cremo
Luiza Alves Batista
Maria Alice Pinheiro
Imagens da Capa
Shutterstock
Edição de Arte
Luiza Alves Batista
Revisão
Os Autores

Atena Editora
Ano 2021

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2

Editora Chefe: Profª Drª Antonella Carvalho de Oliveira
Bibliotecária: Janaina Ramos
Diagramação: Maria Alice Pinheiro
Correção: Mariane Aparecida Freitas
Edição de Arte: Luiza Alves Batista
Revisão: Os Autores
Organizadores: Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Luca Vieira

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

I37 Incompletudes e contradições para os avanços da pesquisa em matemática 2 / Organizadores Américo Junior Nunes da Silva, André Ricardo Luca Vieira. – Ponta Grossa - PR: Atena, 2021.

Formato: PDF
Requisitos de sistema: Adobe Acrobat Reader
Modo de acesso: World Wide Web
Inclui bibliografia
ISBN 978-65-5706-856-4
DOI 10.22533/at.ed.564210803

1. Matemática. I. Silva, Américo Junior Nunes da (Organizador). II. Vieira, André Ricardo Luca (Organizador). III. Título.

CDD 510

Elaborado por Bibliotecária Janaina Ramos – CRB-8/9166

Atena Editora
Ponta Grossa – Paraná – Brasil
Telefone: +55 (42) 3323-5493
www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br

Atena Editora
Ano 2021

Ciências Exatas e da Terra e Engenharias

DECLARAÇÃO DOS AUTORES

Os autores desta obra: 1. Atestam não possuir qualquer interesse comercial que constitua um conflito de interesses em relação ao artigo científico publicado; 2. Declaram que participaram ativamente da construção dos respectivos manuscritos, preferencialmente na: a) Concepção do estudo, e/ou aquisição de dados, e/ou análise e interpretação de dados; b) Elaboração do artigo ou revisão com vistas a tornar o material intelectualmente relevante; c) Aprovação final do manuscrito para submissão.; 3. Certificam que os artigos científicos publicados estão completamente isentos de dados e/ou resultados fraudulentos; 4. Confirmam a citação e a referência correta de todos os dados e de interpretações de dados de outras pesquisas; 5. Reconhecem terem informado todas as fontes de financiamento recebidas para a consecução da pesquisa.

Atena Editora
Ano 2021

APRESENTAÇÃO

A Pandemia do novo coronavírus pegou todos de surpresa. De repentemente, ainda no início de 2020, tivemos que mudar as nossas rotinas de vida e profissional e nos adaptar a um “novo normal”, onde o distanciamento social foi posto enquanto a principal medida para barrar o contágio da doença. As escolas e universidades, por exemplo, na mão do que era posto pelas autoridades de saúde, precisaram repensar as suas atividades.

Da lida diária, no que tange as questões educacionais, e das dificuldades de inclusão de todos nesse “novo normal”, o contexto pandêmico começa a escancarar um cenário de destrato que já existia antes mesmo da pandemia. Como destacou Silva (2021), esse período pandêmico só desvelou, por exemplo, o quanto a educação no Brasil é uma reprodutora de Desigualdades.

E é nesse cenário de pandemia, movimentados por todas essas provocações que são postas, que os autores que participam dessa obra reúnem-se para organizar este livro. Apontar esse momento histórico vivido por todos é importante para destacar que temos demarcado elementos que podem implicar diretamente nos objetos de discussão dos textos e nos movimentos de escrita. Entender esse contexto é importante para o leitor.

O contexto social, político e cultural tem demandado questões muito particulares para a escola e, sobretudo, para a formação, trabalho e prática docente. Isso, de certa forma, tem levado os gestores educacionais a olharem para os cursos de licenciatura e para a Educação Básica com outros olhos. A sociedade mudou, nesse contexto de inclusão, tecnologia e de um “novo normal”; com isso, é importante olhar mais atentamente para os espaços formativos, em um movimento dialógico e pendular de (re)pensar as diversas formas de se fazer ciências no país. A pesquisa, nesse interim, tem se constituído como um importante lugar de ampliar o olhar acerca das inúmeras problemáticas, sobretudo no que tange ao conhecimento matemático.

É nessa sociedade complexa e plural que a Matemática subsidia as bases do raciocínio e as ferramentas para se trabalhar em outras áreas; é percebida enquanto parte de um movimento de construção humana e histórica e constitui-se importante e auxiliar na compreensão das diversas situações que nos cerca e das inúmeras problemáticas que se desencadeiam diuturnamente. É importante refletir sobre tudo isso e entender como acontece o ensino desta ciência e o movimento humanístico possibilitado pelo seu trabalho.

Ensinar Matemática vai muito além de aplicar fórmulas e regras. Existe uma dinâmica em sua construção que precisa ser percebida. Importante, nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, priorizar e não perder de vista o prazer da descoberta, algo peculiar e importante no processo de matematizar. Isso, a que nos referimos anteriormente, configura-se como um dos principais desafios do educador matemático e sobre isso, de uma forma muito particular, abordaremos nesta obra.

É neste sentido, que o livro “***Incompletudes e Contradições para os Avanços da***

Pesquisa em Matemática", nasceu, como forma de permitir que as diferentes experiências do professor pesquisador que ensina Matemática sejam apresentadas e constituam-se enquanto canal de formação para professores da Educação Básica e outros sujeitos. Reunimos aqui trabalhos de pesquisa e relatos de experiências de diferentes práticas que surgiram no interior da universidade e escola, por estudantes e professores pesquisadores de diferentes instituições do país.

Esperamos que esta obra, da forma como a organizamos, desperte nos leitores provocações, inquietações, reflexões e o (re)pensar da própria prática docente, para quem já é docente, e das trajetórias de suas formações iniciais para quem encontra-se matriculado em algum curso de licenciatura. Que, após esta leitura, possamos olhar para a sala de aula e para o ensino de Matemática com outros olhos, contribuindo de forma mais significativa com todo o processo educativo. Desejamos, portanto, uma ótima leitura a todos e a todas.

Américo Junior Nunes da Silva
André Ricardo Lucas Vieira

REFERÊNCIAS

SILVA, A. J. N. da. Professores de Matemática em início de carreira e os desafios (im)postos pelo contexto pandêmico: um estudo de caso com professores do semiárido baiano: doi. org/10.29327/217514.7.1-5. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, [S. l.], v. 7, n. 1, p. 17, 2021. Disponível em: http://periodicorease.pro.br/rease/article/view/430. Acesso em: 10 fev. 2021.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

O PERFIL DO LICENCIANDO EM MATEMÁTICA NO MARANHÃO: POSSIBILIDADES DE FORMAÇÃO DA POSTURA INVESTIGATIVA

Data de aceite: 17/02/2021

Data de submissão: 22/01/2021

Celina Amélia da Silva
Universidade Estadual do Maranhão – UEMA
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Centro de Estudos Superiores de Caxias – CESC
Caxias - MA
http://lattes.cnpq.br/9996099047849353

Carmen Teresa Kaiber
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECIM
Canoas – RS
http://lattes.cnpq.br/6869696643291591

RESUMO: O desenvolvimento de uma postura investigativa, durante a graduação, pode se constituir em um caminho para a vivência de diferentes contextos educativos, a partir da reflexão em torno de questões que envolvem a escola, os estudantes, a Matemática, seu ensino e aprendizagem como caminho para produção de conhecimentos sobre esses temas, contribuindo para a constituição de um profissional com o perfil apontado. O presente artigo pesquisou os cursos de formação de professores de Matemática no que se refere à possibilidade de preparo de seus egressos para a futura prática docente, quanto a constituição de uma postura investigativa do licenciando em Matemática. A investigação se insere em uma perspectiva qualitativa. Foram utilizados questionários, entrevistas semiestruturadas e análise documental. Participaram da investigação coordenadores de curso, professores formadores, licenciandos em Matemática, bem como foi realizada análise dos projetos pedagógicos dos cursos. Os resultados apontam que todos os segmentos entrevistados reconhecem a importância do desenvolvimento de competências relacionadas à pesquisa no processo de formação inicial.

PALAVRAS - CHAVE: Formação inicial de professores de Matemática; Pesquisa na formação do professor de Matemática; Postura investigativa na formação do professor de Matemática.

THE PROFILE OF LICENSING IN MATHEMATICS IN MARANHÃO: POSSIBILITIES OF FORMATION OF THE INVESTIGATIVE POSTURE

ABSTRACT: The development of an investigative posture, during graduation, can constitute a path for the experience of different educational contexts, from the reflection around issues involving the school, students, Mathematics, their teaching and learning as a path to produce knowledge on these topics, contributing to the constitution of a professional with the indicated profile. This article researched the mathematics teacher training courses with regard to the possibility of preparing their graduates for future teaching practice, regarding the constitution of an investigative posture of the Mathematics graduate. The investigation is part of a qualitative

perspective. Questionnaires, semi-structured interviews and document analysis were used. Course coordinators, teachers, teachers in Mathematics participated in the investigation, as well as an analysis of the pedagogical projects of the courses. The results show that all segments interviewed recognize the importance of developing research-related skills in the initial training process.
KEYWORDS: Initial mathematics teacher training. Research in the formation of the mathematics teacher. Investigative stance in the formation of the mathematics teacher.

1 I INTRODUÇÃO

A proposta das diretrizes nacionais para a formação de professores para a educação básica procura atender as orientações oriundas da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 2015), das diretrizes curriculares nacionais para todos os níveis de ensino e suas modalidades e as recomendações constantes nos parâmetros e referenciais curriculares para a Educação Básica

Assim, o documento aponta que os cursos devem ter no desenvolvimento das atividades de formação a articulação entre teoria e prática mediadas pelo processo de reflexão, como forma de se desenvolver o perfil o desejado para o egresso, trazendo expresso que um dos fundamentos da formação do futuro professor é a ideia de professor reflexivo e investigador, objeto de estudo deste trabalho. Ao apontar a pesquisa como elemento essencial na formação profissional do professor, situa-a com foco no processo de ensino e aprendizagem, destacando: “Não se pode esquecer, ainda, que é papel do professor da educação básica desenvolver junto aos seus futuros alunos postura investigativa. Assim, a pesquisa constitui um instrumento de ensino e um conteúdo de aprendizagem na formação” (BRASIL, 2001a, p. 36).

Alinhado com o que preconiza o documento, Ponte (2002, p. 5) aponta para “A necessidade de o professor se envolver em investigação que o ajude a lidar com os problemas da sua prática”. O autor pondera que, nem sempre bom senso, boa vontade e experiência profissional são componentes suficientes para conduzir e solucionar os problemas que surgem no exercício da prática docente. Assim, o autor recomenda a investigação sobre a prática como uma atividade que vai fornecer conhecimentos ao professor sobre aspectos da sua própria prática, que, às vezes, ele desconhece.

É com base nessa perspectiva que a presente investigação é focada nos Cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Maranhão, a partir de questionamentos que emergiram, primeiramente, de uma longa prática educativa e que foram se estabelecendo com a imersão na literatura norteando, por fim, as ações de pesquisa, a saber: Os cursos de Licenciatura em Matemática têm uma organização e estrutura que propiciem o desenvolvimento de uma postura investigativa? Quais atividades estão propostas nos Projetos Pedagógicos dos Cursos de Licenciatura em Matemática que contemplam a prática investigativa como experiência formativa? Como pode ser desenvolvida a

postura investigativa durante a formação inicial do professor de Matemática no Estado do Maranhão? Esses questionamentos iniciais fizeram emergir a questão de pesquisa que norteia a presente investigação: Os Cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Maranhão propiciam aos seus acadêmicos possibilidades para o desenvolvimento de uma postura investigativa em seu processo de formação inicial?

Buscando responder a essas questões, e até mesmo produzir outras, a presente investigação teve por objetivo geral investigar os cursos de formação de professores de Matemática do Estado do Maranhão no que se refere à possibilidade de formação de uma postura investigativa do licenciando em Matemática.

2 I A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA E A FORMAÇÃO DA POSTURA INVESTIGATIVA

No que se refere às licenciaturas, a partir da Lei de Diretrizes e Bases, lei nº 4.024, de 20 de dezembro de 1961, o Conselho Federal de Educação (CFE) estabeleceu currículos mínimos para os cursos de licenciatura pelo Parecer 292/62 (BRASIL, 2001b). No caso da Matemática, a base da organização do currículo era composta por um conjunto de disciplinas do curso de bacharelado em Matemática (Geometria Analítica, Fundamentos da Matemática Elementar, Física Geral, Cálculo Diferencial e Integral, Análise, Cálculo Numérico, entre outras), e estabelecia a inclusão de disciplinas pedagógicas e práticas, que se materializou a partir da inclusão, nesse currículo tomado do bacharelado, das disciplinas de Psicologia da Educação, Didática e Prática de Ensino (CURY, 2001).

Mas foi a partir da promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996 (BRASIL, 2015), e das discussões que se seguiram que, a partir de 2001, o Conselho Nacional de Educação, emitiu um conjunto de pareceres e resoluções que discutiam e encaminhavam normatizações sobre a formação de professores da educação básica na forma de Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica e de Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura em Matemática.

Além das determinações legais, esses documentos preconizam as competências que devem integrar o perfil profissional do futuro professor ao concluir a formação inicial. Na Resolução CNE/CP 1/2002, Art. 2º (BRASIL, 2002), a qual se refere à orientação inerente a formação para a atividade docente, destacam-se:

a) I - o ensino visando à aprendizagem do aluno;

b) IV - o aprimoramento em práticas investigativas.

Inclui-se, também, o que preconiza o Art. 3º, o qual aponta como essencial aos cursos de formação, a pesquisa, com foco no processo de ensino e de aprendizagem.

Já de acordo com o Parecer CNE/CES 1302/2001(BRASIL, 2001), o qual estabelece

as Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Licenciatura em Matemática. O licenciando em Matemática deverá ter, entre outros, visão:

- [...] de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos;
- [...] da contribuição que a aprendizagem de matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício da cidadania;
- [...] de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e a consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição que muitas vezes ainda estão presentes no ensino aprendizagem da disciplina (BRASIL, 2001c, p. 3).

No entanto, o documento não expressa diretamente indicações ou argumentos explícitos com relação à pesquisa no âmbito da Licenciatura em Matemática.

Com base nessas características, e procurando contemplar as habilidades que devem integrar o referido perfil, as instituições elaboram os projetos pedagógicos dos cursos de Licenciatura em Matemática, em atenção aos fundamentos legais expressos quanto às competências e habilidades. Evidenciam-se as que guardam estreita relação com a investigação aqui realizada, as quais se referem a elaboração dos currículos:

> a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; b) capacidade de trabalhar em equipes multidisciplinares; c) [...]; d) capacidade de aprendizagem continuada, sendo sua prática profissional também fonte de produção do conhecimento. (BRASIL, 2001c, p. 3).

Quanto às competências e habilidades próprias do educador matemático:

> a) [...]; b) perceber a prática docente de matemática um processo dinâmico [...] um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente. (BRASIL, 2001c, p. 4).

As habilidades e competências enumeradas ilustram e ressaltam a complexidade da profissão docente, a qual compreende o domínio de conhecimentos teóricos e práticos para agir, não só em uma pretensa rotina de sala de aula, mas em situações de ação imediata e, muitas vezes, incerta, bem como em espaços escolares que vão muito além da sala de aula.

Sobre a questão, Fiorentini (2008) argumenta que no processo de formação do professor, por entender o ensino como uma atividade complexa, é necessário ter claro o que se espera que os professores demonstrem na sua prática docente. De acordo com o autor,

> [...] se queremos formar professores capazes de produzir e avançar os conhecimentos curriculares e de transformar a prática/cultura escolar, então é preciso que adquiram uma formação inicial que lhes proporcione uma sólida base teórico-científica relativa ao seu campo de atuação e que a mesma seja

> desenvolvida apoiada na reflexão e na investigação sobre a prática. Isso requer tempo relativamente longo de estudo e desenvolvimento de uma prática de socialização profissional e iniciação à docência acompanhada de muita reflexão e investigação, tendo a orientação ou supervisão de formadores-pesquisadores qualificados (FIORENTINI, 2008, p. 49).

Seguindo a linha de pensamento de Fiorentini, concorda-se com a complexidade da ação docente, na qual distintos saberes se entrelaçam e um conjunto de conhecimentos teóricos, práticos e experienciais deve ser mobilizado no ato educativo.

Ao iniciarem sua atuação como docentes, os licenciados encontram situações a serem resolvidas, advindas das complexas relações e situações que se estabelecem no ambiente escolar, as quais exigem um conhecimento teórico e prático que pode ir além do conjunto de conhecimentos constituídos no processo de formação, por mais qualificado que esse tenha sido.

Assim, busca-se em Dewey (1979) o entendimento sobre o pensamento reflexivo. Para o autor,

> [...] não se pode dizer como se deve pensar, no entanto, admite que se possa compreender [...] quais são as melhores maneiras de pensar e por que são as melhores, mudará se quiser as suas próprias maneiras até que se tornem mais eficientes, isto é, que executem melhor o trabalho de que é mais capaz o pensamento do que qualquer outra operação mental (DEWEY, 1979, p.13).

Concorda-se com Ponte (2002) quando aponta que os problemas que surgem no processo educativo geralmente são enfrentados, pelo professor, com bom senso e experiência profissional, o que nem sempre conduz a resultados satisfatórios, apontando para

> [...] a necessidade do professor se envolver em investigação que o ajude a lidar com os problemas da própria prática. [...] torna-se necessário a exploração constante da prática e a sua permanente avaliação e reformulação. É preciso experimentar formas de trabalho que levem seus alunos a obter os resultados desejados (PONTE, 2002, p. 5).

Faz se também, interlocução com Marilyn Cochran-Smith e Susan Lytle (1999) a respeito da pesquisa intencional e sistemática do professor. Trata-se de formar um profissional com disposição para investigar a própria prática, ter postura investigativa, pois, segundo Cochran-Smith e Lytle (1999), a partir de uma postura investigativa, os professores questionam suas práticas, procuram perguntas significativas e resolvem problemas.

Cochran-Smith e Lytle (1999) apontam que, do ponto de vista da investigação como postura, a aprendizagem dos professores é mais associada à incerteza do que a certezas, mais a levantamento de problemas e dilemas do que com a solução dos mesmos, bem como ao entendimento de que a investigação tanto advém de questionamentos como os gera.

3 | METODOLOGIA

A investigação ocorreu em um conjunto de Instituições de Ensino Superior públicas do Estado do Maranhão, tendo como sujeitos interlocutores licenciandos em Matemática, professores formadores e coordenadores de curso, considerando, também, o desenvolvimento de pesquisa documental. O estudo insere-se em uma perspectiva qualitativa, utilizando como instrumentos para coleta de dados questionários, entrevistas semiestruturadas e análise documental. Apresenta-se aqui uma das categorias analisadas dos Projetos Pedagógicos dos citados cursos.

4 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Ao analisar os Projetos Pedagógicos dos cursos em estudo, buscou-se identificar o perfil estabelecido para o licenciado, assim como o conjunto de competências e habilidades a serem desenvolvidas ao longo do processo de formação no que se refere, particularmente, a aspectos ligados a pesquisa e/ou investigação.

Optou-se por identificar os perfis das Instituições por PIA, PIB e PIC, os quais estão expressos nos Projetos Pedagógicos conforme destacado no quadro da Figura 6. No quadro, são apresentados tão somente excertos do texto dos Projetos Pedagógicos que façam referência a aspectos relacionados a pesquisa e/ou investigação, foco desse trabalho.

Instituições	Descritor
A	PIA - [...] O licenciado em Matemática pode ainda participar de programas de pesquisa ligados ao processo de ensino e aprendizagem em matemática e áreas afins. [...] Participar de Projetos de Pesquisa na área da educação básica.
B	PIB - No perfil do egresso não é mencionado aspecto relativo à investigação/pesquisa, porém no item competências e habilidades está posto: [...] Conhecimento de processos de investigação que possibilitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica [...].
C	PIC - [...] deverá possuir uma postura investigativa em torno dos problemas educacionais e os específicos da área de matemática. [...] Capacidade de: - Articular as atividades de ensino e pesquisa com as problemáticas sociais [...]. - Desenvolver processos investigativos na esfera de formação tendo em vista a solução criativa de problemas educativos [...].

Figura 1- Projetos Pedagógicos. Perfil

Fonte: a pesquisa.

O perfil do licenciado na IES-A aponta para a possibilidade de o mesmo vir a participar de programas ou projetos de pesquisa ligados à área da educação básica ou,

mais especificamente, ligados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, o que encaminha à ideia de que, ao longo do processo de formação, o licenciando tem a oportunidade de receber uma formação que o instrumentalize a tal. Considera-se, pela formulação do perfil, que os "programas de pesquisa" ou "projetos de pesquisa" referidos estejam mais próximos da visão de pesquisa desenvolvida no âmbito das Instituições de Ensino Superior, relacionada à visão da Universidade se desenvolvendo em torno do tripé ensino-pesquisa-extensão e não, propriamente, à ideia de pesquisa ou investigação relacionada à aprendizagem do professor que considere as conexões entre pesquisa, conhecimento e prática docente no sentido da "investigação como postura" (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999).

Um dos projetos analisados (IES-B) não destaca, em seu perfil, o aspecto relativo à investigação ou pesquisa, o que não significa que não o faz em outras partes do projeto, como quando são apontadas habilidades e competências a serem desenvolvidas ao longo da formação.

Já o perfil proposto no Projeto Pedagógico da IES-C menciona, explicitamente, que o egresso deverá "[...] possuir uma postura investigativa em torno dos problemas educacionais e os específicos da área de matemática [...]" e que deverá ter capacidade de "Desenvolver processos investigativos na esfera de formação tendo em vista a solução criativa de problemas educativos [...]" (MARANHÃO, 2010, p. 14). Assim há uma visão que não só valoriza a pesquisa ou investigação no processo de formação, mas, principalmente, o faz alinhado com a visão da formação de uma postura investigativa do licenciando não tendo indicativos claros que o aproxime da investigação como postura apresentada em Cochran-Smith e Lytle (1999).

Instituições	Competências e Habilidades referentes a pesquisa/investigação
A	• Garantir um ensino de qualidade, buscando a indissociabilidade entre ensino, pesquisa e extensão. • Integrar professores e alunos num processo de criação de conhecimento partilhado, onde os problemas do cotidiano sejam não somente vivenciados, mas também enfocados e abordados criticamente. • Participar de projetos de pesquisa na área de educação básica. • Formar um profissional crítico, com independência intelectual, criativo e comprometido com interesse coletivo. • Despertar no aluno o interesse pela busca constante do aperfeiçoamento através da participação em seminários e, futuramente, cursos de Pós-Graduação. • Criar grupos de estudos e pesquisas.
B	• Aprender continuadamente e produzir novos conhecimentos através de sua prática profissional, participando com desenvoltura de cursos de Pós-Graduação e encontros científicos da área de Educação Matemática. • Conhecer os processos de investigação que possibilitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica. • Administrar os constantes conflitos da prática profissional do ensino de Matemática, através da reflexão sobre a atuação profissional, superá-los com novas estratégias.
C	• Desenvolver processos investigativos na esfera da docência e da sua área específica de formação tendo em vista a solução criativa de problemas educativos (MARANHÃO, 2010). • Solucionar, com base na utilização de método de investigação científica, os problemas na área da Matemática, identificados no contexto educacional e social de forma individual e coletiva (MARANHÃO, 2010). • Solucionar problemas reais da prática pedagógica, observando as etapas de aprendizagem dos alunos, como também suas características socioculturais, mediante uma postura reflexivo-investigativa (MARANHÃO, 2010). • Desenvolver e estimular processos investigativos, empregando métodos e procedimentos específicos de investigação de sua área/disciplina possibilitando a resolução de problemas identificados no contexto educativo e social (MARANHÃO, 2012).

Figura 2 - Projetos Pedagógicos: Competências e Habilidades

Fonte: a pesquisa.

Assim, considera-se que os Projetos Pedagógicos, quer no perfil do licenciado, quer no destaque dado às competências e habilidades a serem desenvolvidas ao longo do curso, apresentam indicativos que apontam para a relevância da investigação e da pesquisa no processo de formação inicial. Particularmente, em um dos projetos, o da IES-C, essa questão é bastante relevante, sendo que as competências e habilidades destacadas no Projeto Pedagógico (MARANHÃO, 2010, 2012), tais como “Desenvolver e estimular processos investigativos [...] possibilitando a resolução de problemas identificados no contexto educativo e social” (MARANHÃO, 2012, p. 22), “Solucionar, com base na utilização de método de investigação científica os problemas na área da Matemática, identificados no contexto educacional e social de forma individual e coletiva” (MARANHÃO, 2010, p. 13),

“Solucionar problemas reais da prática pedagógica [...] mediante uma postura reflexivo--investigativa” (MARANHÃO, 2010, p. 13), apontam para uma visão de formação do professor no âmbito do que Cochran-Smith e Lytle (1999) apontam como conhecimentos em prática.

Entende-se que as competências e habilidades apontadas são fortes indicativos do que o Curso se propõe realizar no âmbito da formação de um professor reflexivo-investigativo no sentido de que os mesmos possam desenvolver um “conhecimento em prática” (COCHRAN-SMITH; LYTLE, 1999), investigando problemas que surgem no contexto educativo envolvendo a Matemática, considerando as questões sociais, culturais e políticas envolvidas, gerando, assim, conhecimento que, articulado às teorias produzidas por pesquisadores das universidades, permitam enfrentar os problemas emergentes. Já no Projeto Pedagógico da IES-A (MARANHÃO, 2013, p. 5), há uma competência que se refere a “Integrar professores e alunos num processo de criação de conhecimento partilhado, onde os problemas do cotidiano sejam não somente vivenciados, mas também enfocados e abordados criticamente”, que, entende-se, coloca-se na mesma perspectiva do que está posto no projeto da IES-C, ou seja, aponta para um possível “processo de criação de conhecimento partilhado” entre professores formadores e acadêmicos, o que, entende-se, coloca em evidência aspectos apontados por Cochran-Smith e Lytle (1999) na concepção da investigação como postura.

Por fim, no Projeto Pedagógico da IES-B (MARANHÃO, 2011), percebe-se um discurso que aponta para a produção de conhecimentos fortemente ligados à prática profissional ou, ainda, os processos de investigação postos para o aperfeiçoamento da prática, sendo apresentada, também, a reflexão como elemento que encaminhe a solução de conflitos advindo da prática profissional do ensino da Matemática. Essa visão perpassa as indicações postas no Projeto Pedagógico e aqui destacadas: “Aprender continuadamente e produzir novos conhecimentos através de sua prática profissional”, conhecer os “processos de investigação que possibilitem o aperfeiçoamento da prática pedagógica. Administrar os constantes conflitos da prática profissional [...] através da reflexão sobre a atuação profissional [...] (MARANHÃO, 2011, p. 10).” Embora se considere que há indicativos de competências que permitem compor um perfil que encaminhe ao desenvolvimento de uma postura investigativa, não há uma ênfase nesse sentido.

Pondera-se, por fim, que em maior ou menor grau, os três projetos analisados, no que se refere a competências e habilidades dos futuros professores de Matemática, apontam elementos que permitem inferir que os mesmos valorizam os processos de pesquisa na formação do licenciando.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo que agora se está finalizando buscou aprofundar conhecimentos sobre

a formação de professores de Matemática no Estado do Maranhão, especialmente no que se refere a aspectos e elementos relacionados à presença da pesquisa ou investigação no âmbito dos cursos de Licenciatura, com vistas a identificar possibilidades do desenvolvimento da "investigação como postura" nos termos teóricos colocados. Nesse sentido, na investigação produzida, ao mesmo tempo em que se buscou gerar um conhecimento local, tinha-se, também, a intenção de gerar um conhecimento que viesse a servir de base para a análise de outros contextos.

Pondera-se que estes entendimentos, reflexões e mesmo conhecimento gerado a partir do trabalho de pesquisa realizado, ao mesmo tempo em que permite inferir a existência de um potencial que leve a pesquisa a ocupar um lugar de destaque nos cursos de formação, permitem afirmar que a "investigação como postura" proposta por Cochran-Smith e Lytle (1999) não se faz presente nos cursos.

Entende-se que o trabalho desenvolvido está relacionado com desenvolvimento do que as autoras apontam como "conhecimento para prática" e "conhecimento na prática", distante do "conhecimento da prática" sugerido como elemento-base para se chegar à "investigação como postura". Entende-se que a visão e o entendimento da pesquisa como um dos eixos norteadores da organização dos cursos é uma tomada de decisão que deve ocorrer no interior dos mesmos, pelos envolvidos no processo de formação. O que se conjectura é sobre a possibilidade de este trabalho de pesquisa contribuir de alguma forma para tal.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP nº 02/2015, de 1º de julho de 2015. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. **Diário Oficial da União.** Brasília, DF, 02 jul. 2015.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer nº 09/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 08 maio. 2001a.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer nº 28/2001. Dá Nova Redação ao Parecer CNE/CP 21/2001, que estabelece a Duração e a Carga Horária dos Cursos de Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, cursos de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 02 out. 2001b.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer nº 1302/2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 06 nov. 2001c.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Resolução CNE/CP 1/2002. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, 9 de abril de 2002.

CURY, H. N. A formação dos formadores de professores de matemática: quem somos, o que fazemos, o que poderemos fazer? In: CURY, H. N. (Org.). **Formação de professores de matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001. p. 11-28.

DEWEY, D. J. **Como pensamos**. Tradução Haydé Camargo Campos. 4. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1979. (Atualidades Pedagógicas, 2).

FIORENTINI, D. A pesquisa e as práticas de formação de matemática em face das políticas públicas no Brasil. **Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, a. 21, n. 29, p. 43-70, 2008.

MARANHÃO. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura Plena em Matemática.** São Luís: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA, 2010.

MARANHÃO. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática.** São Luís: Universidade Federal do Maranhão - UFMA, 2011.

MARANHÃO. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura Plena em Matemática.** Codó: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - IFMA, 2012.

MARANHÃO. **Projeto Pedagógico do Curso de Matemática.** São Luís: Universidade Estadual do Maranhão - CESC/UEMA, 2013.

PONTE, R. A. A investigar a própria prática. In: GTI (Ed.). **Reflectir e investigar sobre a prática profissional**. Lisboa: APM, 2002. p. 5-28.

ZEICHNER, K. M. **A formação reflexiva de professores**: ideias e práticas. Lisboa: Educa, 1993.

CAPÍTULO 2

GEOMETRIA EUCLIDIANA E NÃO EUCLIDIANAS RECORTES HISTÓRICOS

Data de aceite: 17/02/2021
Data da submissão: 05/01/2021

Adan Rodrigo Vale Pacheco
Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA)
Belém – Pará
ORCID: 0000-0002-9819-6763

Fábio Barros Gonçalves
Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA)
Belém – Pará
ORCID: 0000-0001-8212-7694

Miguel Chaquiam
Universidade do Estado do Pará (UEPA)
Belém – Pará
ORCID: 0000-0003-1308-8710

RESUMO: Este artigo que apresenta uma proposta de estudo sobre as Geometrias, Euclidiana e Não-Euclidiana, e tem como objetivo subsidiar o leitor com caminhos que possibilitem a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico do conteúdo matemático, bem como a demarcação do tempo e espaço na história da humanidade para extrapolar a visão internalista da matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula. Neste sentido, assentados numa pesquisa histórico bibliográfica respondemos a seguinte questão: A partir de recortes da história da matemática é possível elaborar um texto que retrate uma história das geometrias, euclidiana e não-euclidiana, balizado no diagrama metodológico proposto por Chaquiam (2017)? Esta abordagem metodológica consiste na construção de um diagrama onde seus componentes estão distribuídos em três contextos: sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico. A partir da elaboração do referido diagrama resultou o texto que retrata uma história das geometrias com possibilidades de uso em sala de aula como recurso didático. Esse fato nos permite concluir que o diagrama é um orientador e balizador na escrita de textos de história da matemática com possibilidades de uso como recurso didático em sala de aula durante o ensino de conteúdos matemáticos.

PALAVRAS - CHAVE: História da Matemática. Geometria Euclidiana. Geometria Não Euclidiana. Ensino de Matemática.

EUCLIDIAN AND NON EUCLIDIAN GEOMETRY HISTORICAL CLIPPINGS

ABSTRACT: This article, which presents a study proposal on Geometries, Euclidean and Non-Euclidean, and aims to provide the reader with paths that enable the construction of a story, linked to the historical development of mathematical content, as well as the demarcation of time and space in human history to extrapolate the internalist view of mathematics, with a view to its use in the classroom. In this sense, based on a historical bibliographic research, we answer the following question: From cuttings of the history of mathematics is it possible to elaborate a text that portrays a history of geometries, Euclidean and non-Euclidean, based on the methodological diagram proposed by Chaquiam (2017)? This

methodological approach consists in the construction of a diagram where its components are distributed in three contexts: socio-cultural, multidisciplinary and technical-scientific. From the elaboration of that diagram resulted the text that portrays a history of geometries with possibilities of use in the classroom as a didactic resource. This fact allows us to conclude that the diagram is a guide and guides in the writing of texts on the history of mathematics with possibilities of use as a didactic resource in the classroom during the teaching of mathematical contents.
KEYWORDS: History of Mathematics. Euclidean Geometry. Non-Euclidean Geometry. Mathematics Teaching.

INTRODUÇÃO

O modo de conceber a aprendizagem, o planejamento e plano pedagógico, os tempos das aprendizagens, as finalidades dos conteúdos, a transposição didática, dentre outros, são fatores que, de alguma forma, estão relacionados com a escolha metodológica do professor no processo de ensino e de aprendizagem.

Neste sentido, percebe-se que as metodologias têm responsabilidade sobre a aprendizagem, pois influenciam nas representações elaboradas pelos estudantes as quais podem ser de determinismo e/ou de possibilidades, e esse olhar dependerá de como o conhecimento será mediado pelo professor.

Com relação ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, não existe um caminho único e melhor. Conhecer variadas possibilidades é essencial para a prática docente visando potencializar esse processo. Dentre elas, compreendemos ser relevante aqui destacar a História da Matemática.

A História da Matemática, como um recurso pedagógico, permite contextualizar o conhecimento, situando-o e relacionando-o com variados contextos sociais nos quais foram concebidos, afinal, eles geralmente respondem as demandas historicamente situadas num tempo e espaço.

No entanto, a História da Matemática como um recurso para o ensino de Matemática, não deve ficar limitada à descrição de fatos ocorridos no passado ou a mera apresentação da biografia de matemáticos importantes. É necessário abordar com os estudantes a história dos conteúdos matemáticos, sua evolução, o contexto histórico, social e político no qual determinado conteúdo matemático emergiu, assim como as principais dificuldades enfrentadas para a formalização e aceitação pela comunidade, desse conhecimento ao longo do tempo.

A partir desse entendimento, apresentamos uma proposta de estudo sobre as Geometrias Euclidiana e Não-Euclidiana baseada no diagrama metodológico de Chaquiam (2016) que orientou a elaboração de um texto sobre as Geometrias associada a personagens matemáticos, um central, Lobachevsky, e outros que contribuíram para evolução do tema, assim como, um contemporâneo do personagem em destaque e o cenário mundial da

época conforme Figura 1, a seguir.

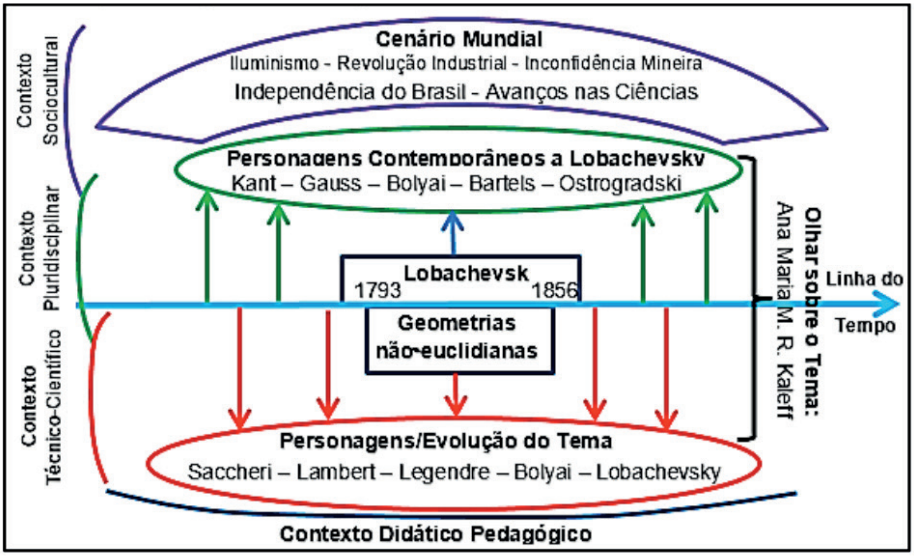


Figura 1: Diagrama Metodológico – As Geometrias Euclidiana e Não-Euclidiana

Fonte: Adaptado de Chaquiam (2017),

Como pode ser observado no diagrama metodológico, seus componentes estão distribuídos em três contextos, quais sejam: sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico.

Mendes e Chaquiam (2016, p. 88) ressaltam que esta abordagem não tem como objetivo apresentar e discutir de forma detalhada e aprofundada indagações acerca de determinado tema ou sobre a história da matemática, mas, subsidiar o leitor com caminhos que possibilitem a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico dos conteúdos matemáticos, bem como a demarcação do tempo e espaço na história da humanidade para extrapolar a visão internalista da matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula durante o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos durante a Educação Básica.

Nesse sentido, este artigo servirá como material de apoio à professores de diversas áreas, mas sobretudo de matemática da Educação Básica e os que se encontram em formação.

SOBRE O CENÁRIO MUNDIAL

Com o objetivo de compreender o contexto mundial em torno do personagem central,

Lobachevsky (1793 – 1856), assim como, nos situar no tempo e espaço, destacamos alguns acontecimentos da História da Humanidade no período compreendido entre 1750 a 1860, quais sejam: Iluminismo e Independência do Brasil.

Iluminismo

O Iluminismo foi um movimento cultural da elite intelectual europeia do século XVIII que procurou mobilizar o poder da razão a fim de reformar a sociedade e o conhecimento herdado da tradição medieval. Ele também é conhecido como século das Luzes, pois os escritores da época estavam convencidos que emergiriam da escuridão e ignorância para uma nova era, iluminada pela razão, ciência e respeito à humanidade. O centro das ideias e pensadores iluministas foi à cidade de Paris.

Este movimento aprofundou o processo da transformação social e técnica – em detrimento da metafísica e dos cálculos esotéricos.

Através da popularização da Ciência alcançou-se um grau de desenvolvimento. Ou seja, este foi

> um dos ícones daquele século, que marcou o sucesso definitivo de uma doutrina geral de progresso. O avanço da astronomia – com a perda do privilégio cósmico da Terra – e a necessidade de admitir que podemos não estar sós no universo tiveram uma profunda influência no pensamento humano. O destino universal do homem, defendido pela Igreja, sofreu forte abalo; restava-nos perdidos na imensidão do universo, encontrar uma teoria menos grandiosa para iluminar nosso futuro de habitantes desse pequeno planeta. (DUPAS, 2006, p. 40 apud Mello e Donato, 2011).

Segundo Mello e Donato, 2011 através de Adorno; Horkheimer, 1985 e Silva, 2005, este processo levou à dissolução dos mitos e a substituição da imaginação pelo saber racional e científico. Dessa forma, terminada a era das explicações metafísicas, a racionalidade acabava por tomar seu lugar com sentido único e absoluto para a validação do conhecimento humano, perdendo a natureza o seu fator de encantamento e receio ao homem e passando a ser sobreposta pelo pensamento racional e técnico da sociedade.

Pacievitch afirma que os iluministas defendiam a criação de escolas para que o povo fosse educado e a liberdade religiosa. Para divulgar o conhecimento, os iluministas idealizaram e concretizaram a ideia da Enciclopédia (impressa entre 1751 e 1780), uma obra composta por 35 volumes, na qual estava resumido todo o conhecimento existente até então.

Os principais pensadores iluministas foram: Montesquieu (1689-1755), Voltaire (1694-1778), Écrasez l'Infâme, Diderot (1713-1784), Rousseau (1712-1778) e D'Alembert (1717-1783).

Independência do Brasil

Segundo Fernandes (2017), a Independência do Brasil, ocorrida em 7 de setembro

de 1822, é um dos acontecimentos mais importantes da história do Brasil, haja vista que foi nesse momento que houve uma clara ruptura com as Cortes Portuguesas. Para entendermos bem como se desenrolou o processo de Independência, é necessário que saibamos um pouco do contexto em que tanto Portugal quanto o Brasil estavam inseridos nas primeiras décadas do século XIX.

Sabemos que, em 1808, o Brasil havia sido alçado à condição de Reino Unido, junto a Portugal e Algarves – em decorrência da fuga da Família Real Portuguesa de sua terra, que ocorreu em razão da ofensiva das tropas de Napoleão Bonaparte. Como o Brasil tornou-se a sede desse Reino Unido, muitas transformações de toda ordem (política, cultural, econômica e social) ocorreram por aqui nesse período.

A atuação política de brasileiros, desde os mais radicais até os mais moderados, passou a ter amplo destaque durante a presença do príncipe regente D. João VI e de sua família aqui. Os problemas tiveram início quando, após a queda do Império Napoleônico, em 1815, uma onda de reconfiguração política deslanchou-se por toda a Europa, atingido também Portugal. Em 1820, houve a Revolução Liberal do Porto e, antes disso, a Conspiração de Lisboa, em 1817. A Revolução do Porto teve grande apoio de todas as camadas da população portuguesa, que passaram a exigir a convocação das Cortes para a elaboração de uma nova constituição para o Reino de Portugal.

Nas discussões das Cortes Gerais Portuguesas, os embates entre brasileiros e lusitanos tornaram-se inevitáveis, sobretudo pelo fato de alguns portugueses desejarem a volta do Brasil à condição de colônia de Portugal. Com a resistência dos brasileiros a essa perspectiva, restava aos portugueses exercer maior pressão. Nos meses que se seguiram, os conflitos com os portugueses tornaram-se ainda mais intensos. Em 07 de setembro de 1822, a Independência foi consumada.

A seguir destacamos Emmanuel Kant como contemporâneo ao personagem principal, Lobachevsky, descrevendo seu traço biográfico e trabalhos desenvolvidos.

EMMANUEL KANT

Segundo Maciel (2017), o filósofo alemão Emmanuel Kant (1724 – 1804), foi um dos principais pensadores do período moderno da filosofia. Abordando questões que abrangiam desde a moralidade até a natureza do espaço e do tempo. Kant é reconhecido particularmente por promover a reunião conceitual entre o racionalismo, que tem em Descartes seu maior expoente, e o empirismo, tal como apresentado por Hume. Kant comparou a si mesmo com Copérnico, que reverteu a forma como vemos o sistema solar, na medida em que seu trabalho promoveu uma revolução similar na filosofia.

Em sua Crítica da Razão Pura, de 1781, Kant leva este trabalho a cabo e busca afastar o ceticismo de filósofos como David Hume, promovendo a dissolução do impasse entre racionalistas e empiristas. Sua posição não implica em relativismo da realidade, de

fato Kant defende uma realidade objetiva, para a qual cunhou o termo «coisa em si», porém, se não pelas configurações específicas da mente humana a experiência da coisa em si é impossível, de modo que só temos acesso ao resultado de nossos conceitos aplicados sobre a realidade, para o que utilizou o termo “fenômeno”. Desta forma, não temos acesso a coisa em si, mas a mente humana não altera a realidade, enquanto coisa em si, ela altera a nossa experiência da realidade, o fenômeno, em última instância, a mente humana torna possível a experiência.

Devido a estas mesmas configurações, conceitos como espaço e tempo são compartilhados por todas as mentes, de modo a tornar possível a comunicação, o conhecimento e a moral. Em ética, seu principal legado é o conceito de imperativo categórico, que utilizou para afastar a visão utilitarista.

Em termos de filosofia política, Kant foi uma expoente da ideia de que a Paz Perpétua seria o resultado da história universal, sendo atingida, em algum momento, e garantida sem um planejamento racional, mas pela cooperação internacional. O autor defendeu um estado baseado na lei, ou uma reunião de indivíduos sob a lei, com um governo republicano. Kant recusou a democracia direta, pois esta oferece risco a liberdade individual, comparando a democracia com o despotismo, uma vez que esta estabelece um poder executivo que pode governar contra a liberdade dos indivíduos que discordam da maioria. Criticou ainda que a democracia é normalmente identificada com a ideia de que todos governam, mas de fato o «todo» não é a totalidade. O autor propunha um governo misto, composto de elementos da democracia, aristocracia e monarquia, o que deveria servir para evitar as suas formas degeneradas, respectivamente anarquia, oligarquia e tirania.

As posições e teorias de Kant continuam a ser estudadas ativamente, em campos clássicos como a política e a metafísica, assim como em campos contemporâneos como a ciência cognitiva e filosofia da psicologia. Entre seus maiores críticos encontramos os filósofos Arthur Schopenhauer e Johann Georg Hamann.

LOBACHEVSKY: O PERSONAGEM EM DESTAQUE

Nicolai Ivannovitch Lobachevsky (1793 – 1856), é natural da cidade de Gorki na Rússia. Segundo Matos e Neves (2010, p. 82), ele era um dos três irmãos de uma família muito pobre.

Ainda segundo os autores supracitados, em 1800 aos sete anos de idade, seu pai faleceu e sua mãe resolveu se mudar para a cidade de Kazan, nas proximidades da fronteira com a Sibéria. Foi a partir daí que ele começou seus estudos, financiado sempre por bolsas escolares.

Segundo Eves (2004, p. 542), “Lobachevsky passou a maior parte de sua vida na Universidade de Kazan, primeiro como aluno, depois como professor de matemática e finalmente como reitor.” Por outro lado, Bonola (1954, p.84) em seu livro Non-Euclidean

Geometry, afirma que

> He took his degree in 1813 and remained in the University, first as Assistant, and then as Professor. In the later position he lectured upon mathematics in all its branches and also upon physics and astronomy.[1] (BONOLA, 1954, p.84)

Como podemos perceber, Lobachevsky começou seus estudos tardiamente, entretanto aos vinte anos de idade recebeu seu diploma, equivalente à graduação de hoje, da Universidade de Kazan. Logo depois passou a lecionar matemática, física e astronomia nessa mesma instituição.

Sua vida acadêmica sempre esteve vinculada à Universidade de Kazan, onde veio ocupar o cargo de reitor de 1827 até 1846. Além dos trabalhos envolvendo as geometrias não-euclidianas, Lobachevsky também desenvolveu trabalhos em álgebra, mais precisamente nas aproximações numéricas às raízes das equações algébricas. Ele faleceu na cidade de Kazan, Rússia, em 1856.

A seguir, iremos retomar o tema proposto para explicar e esclarecer alguns pontos importantes para o melhor entendimento do mesmo. Além disso, iremos traçar o caminho, por nós escolhido, para explicar como se deu a evolução do tema e quais foram os personagens que, de certa forma, contribuíram para tal desenvolvimento.

SOBRE A EVOLUÇÃO DAS GEOMETRIAS

Para tratarmos das geometrias não-euclidianas precisamos primeiramente nos reportar à geometria euclidiana, organizada pelo matemático e filósofo grego Euclides por volta do ano 300 a.C.

Segundo Eves (2004, p.167), Euclides desenvolveu diversos trabalhos, pelo menos dez, entretanto o que lhe trouxe notoriedade foi a obra intitulada “Os Elementos”. Estes estão organizados em treze livros e tratam de diferentes objetos matemáticos. Os livros I ao VI, trazem a Geometria no seu escopo.

A forma como Euclides organizou a Geometria Plana nos seus livros está baseada no método axiomático ou postulacional que consiste em aceitar como verdadeiras algumas afirmações, axiomas ou postulados, previamente estabelecidos e, a partir desses, demonstrar outras proposições de forma dedutiva. Esses axiomas e postulados pretendiam deduzir todas as 465 proposições de Os Elementos. O quinto postulado diferencia-se dos demais, seja pela sua extensão ou por não ser tão auto evidente.

> P5: Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos. (EVES, 2004, p.180)

1 Ele pegou seu diploma em 1813 e permaneceu na universidade, primeiramente como assistente, e então como professor. Na última posição ele lecionou sobre matemática em todos os seus ramos e também sobre física e astronomia. (Tradução livre)

A Figura 2 a seguir, ilustra o quinto postulado de Euclides. Segundo o postulado se $\alpha + \beta < 180^o$, então as retas **r** e **s** irão se intersectar.

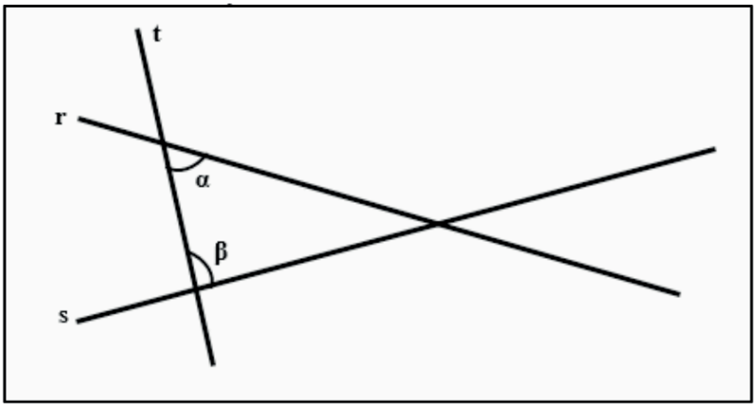


Figura 2: Quinto Postulado de Euclides

Fonte: Adaptado de Eves (2004)

Dentre os vários substitutivos encontrados para o quinto postulado de Euclides, o mais conhecido e usado nos tempos modernos foi atribuído ao matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819). De acordo com Eves (2004, p. 539), “é o substituto mais comum nos atuais textos elementares de geometria: Por um ponto fora de uma reta dada não há mais do que uma paralela a essa reta”. O estudo do postulado das paralelas, como ficou conhecido o quinto postulado de Euclides, abriu portas para o surgimento de outras geometrias, as denominadas de geometrias não-euclidianas.

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de evolução das geometrias não-euclidianas a partir de alguns personagens que contribuíram de alguma forma para o tema. Os personagens escolhidos neste trabalho para tratarmos do processo evolutivo das geometrias não-euclidianas, foram: Girolamo Saccheri (1667-1733), Nicolai Ivanovitch Lobachevsky (1793-1856); Janos Bolyai (1802-1860) e Bernhard Riemann (1826-1866).

Girolamo Saccheri

Segundo Eves (2004, p. 540), Saccheri nasceu em São Remo, Itália. Aos vinte e três anos concluiu seu noviciado na Ordem Jesuíta e passou o resto de sua vida ocupando cargos de professor universitário. Ele leu a obra Os Elementos de Euclides quando ensinava retórica, filosofia e teologia no Colégio Jesuíta de Milão. Saccheri ficou encantado com o método utilizado por Euclides de reductio ad absurdum (redução ao absurdo) ao tratamento da lógica formal.

Para Eves (2004), Saccheri publicou em Turin, quando ensinava filosofia, a obra

intitulada Lógica demonstrativa. Nessa obra, Saccheri passou a aplicar o poderoso método de redução ao absurdo ao tratamento da lógica formal. Alguns anos depois, ele resolveu aplicar esse método ao estudo do postulado das paralelas de Euclides. Foi então que escreveu um livro intitulado Euclides *ab omni naevo vindicatus* (Euclides Livre de Toda Imperfeição) que foi publicado em Milão no ano de 1733, alguns meses depois do seu falecimento.

Nesse trabalho sobre o quinto postulado de Euclides, Saccheri construiu um quadrilátero com dois lados opostos congruentes e perpendiculares a mesma base, como mostra a Figura 3 a seguir.

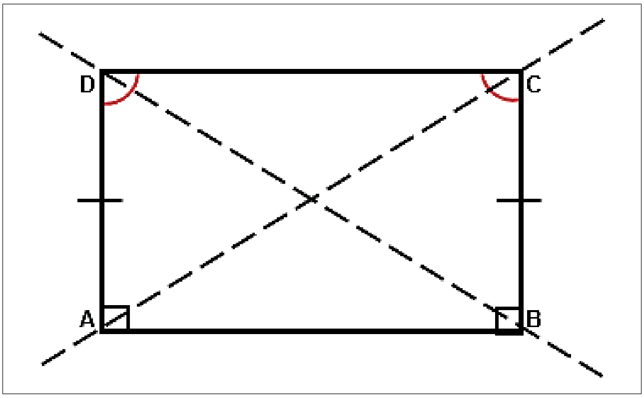


Figura 3: Quadrilátero de Saccheri

Fonte: Adaptado de Eves (2004)

Esse quadrilátero ficou conhecido como quadrilátero de Saccheri. Traçando as diagonais AC e BD, Ele mostrou que os ângulos C e D são congruentes, apoiando-se em algumas proposições de congruências, que estão entre as vinte oito proposições iniciais de Euclides.

De posse dessa conclusão, Saccheri verificou que havia três possibilidades de medidas para os ângulos C e D: agudos, retos ou obtusos. De acordo com Eves (2004, p.540), essas hipóteses ficaram conhecidas como: hipótese do ângulo agudo, hipótese do ângulo reto e hipótese do ângulo obtuso. O trabalho de Saccheri consistiu em mostrar que a suposição da hipótese do ângulo agudo e a do ângulo obtuso levavam a uma contradição e, por redução ao absurdo, validava-se a hipótese do ângulo reto, o que mostrou implicar no postulado das paralelas.

De acordo com Eves (2004), Saccheri eliminou logo a hipótese do ângulo obtuso ao assumir tacitamente a infinitude da reta. Porém, na hipótese do ângulo agudo tornou-se

complexo.

O trabalho de Saccheri não recebeu o devido reconhecimento por seus contemporâneos e ficou por muitos anos esquecido.

Janos Bolyai

Janos Bolyai (1802-1860) nasceu na Hungria, foi oficial do exército austríaco. Seu pai, Farkas Bolyai, era professor de matemática e amigo de Gauss. Não restam dúvidas de que Bolyai recebeu incentivos de seu pai para estudar o postulado das paralelas, pois em tempos anteriores havia se interessado pelo problema. (EVES, 2004, p.542)

De acordo com Eves, por volta do ano 1823 Janos Bolyai percebeu a dimensão da natureza do problema que tentava resolver. Mas, se mostrou motivado com o seu trabalho, o que fez questão de compartilhar com seu pai através de uma carta escrita ao mesmo naquele ano. Nessa carta, comunicou-o que tinha interesse em publicar seus estudos sobre a teoria das paralelas, mas precisaria de um tempo para organizar seu material. Bolyai exclamou dizendo: “Do nada eu criei um universo novo e estranho.”

Segundo Ribeiro (2012, p.54), em 1832, Bolyai finalmente publicou seu trabalho intitulado de Ciência Absoluta do Espaço como apêndice de um livro de seu pai, intitulado Tentamen. Bolyai mostrou que existia uma coleção de proposições que independiam do postulado das paralelas e que, portanto, tinham validade tanto na geometria euclidiana quanto na não-euclidianas.

Bolyai obteve resultados significativos para o avanço do entendimento da existência de outras geometrias diferentes da euclidiana. A lentidão no processo de publicação do seu trabalho fez com que o mérito da descoberta da existência de outras geometrias ficasse com Lobachevsky, pois publicou seus trabalhos antes, como veremos a seguir.

Nicolai Ivanovitch Lobachevsky

Segundo Halsted (1914) apud Ribeiro (2012, p.49), Lobachevsky, foi o primeiro a publicar, em 1829, um trabalho de substituía o postulado das paralelas por outro que supunha sua negação e que, não tinha a intenção de mostrar uma inconsistência para então demonstrar o quinto postulado.

De acordo com Greenberg (1994) apud Ribeiro (2012, p.50), primeiramente Lobachevsky denominou a nova geometria de imaginária e, posteriormente de pangeometria. Por ter sido publicada inicialmente em russo, sua obra ficou desconhecida do restante do mundo acadêmico por um longo período. Somente em 1840 esse quadro começou a ser revertido, pois ele publicou um tratado em alemão intitulado Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien (Investigações Geométricas sobre a Teoria das Paralelas).

De acordo com Bonola (1912) apud Ribeiro (2012, p.50), Lobachevsky considerou o seguinte postulado: por um ponto fora de uma reta dada, passam mais de uma reta que não intersectam a primeira.

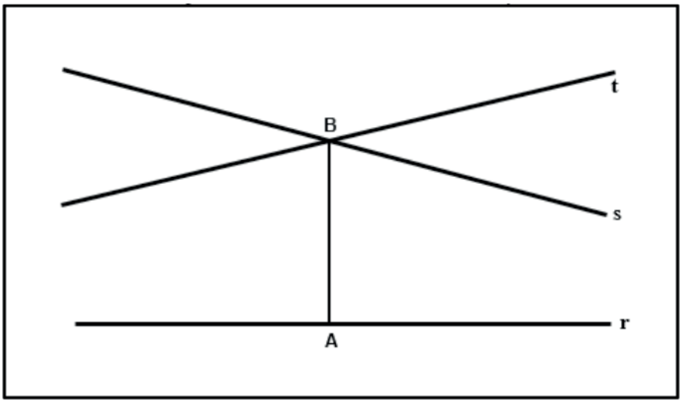


Figura 4: Postulado de Lobachevsky

Fonte: Adaptado de Ribeiro (2012)

Assim, de acordo com esse postulado, o matemático russo define retas não secantes e retas paralelas. As não secantes seriam todas as retas que não intersectam a reta r e, reta paralela como a primeira que não a intersecta. (LOBACHEVSKY, 1914, p.13 apud RIBEIRO, 2012, p.50)

De acordo com Ribeiro (2012), Lobachevsky definiu da seguinte maneira uma reta paralela:

> Given a line and a point in a plane, I call parallel to the given line drawn from the given point a line passing through the given point and which is the limit between the lines that are drawn in the same plane, that pass through the same point and that, when extended from one side of the perpendicular dropped from that point on the given line, and those that do not cut it.[2]
>
> (LOBACHEVSKY, 2010, apud RIBEIRO, 2012, p. 50)

Bernhard Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), nasceu em Hanover na Alemanha e faleceu em Selasca, cidade italiana. Um de seus principais professores foi Gauss. Era de uma família modesta, porém teve boas instruções. Primeiramente em Berlim e mais tarde em Gottingen, onde se tornou Doutor. (MATOS e NEVES, 2010, p.95)

Segundo Ribeiro (2012, p.55), Riemann "surpreendeu a todos com sua teoria que apresentava ao mundo uma ideia muito mais ampla de geometria". Agora, Riemann deu

2 Dados uma reta e um ponto no plano, chamo de paralela à reta dada pelo ponto dado uma reta que passa por tal ponto e que seja o limite das retas coplanares que tenham este ponto em comum e que, quando prolongadas a um dos lados da perpendicular que liga o ponto à reta dada, intersectam esta reta e aquelas que não a intersectam. (Tradução, RIBEIRO, 2012)

um sentido **à** hipótese do ângulo obtuso, aproveitando as suposições de Bolyai. Riemann percebeu que Euclides assumiu sem prova, ou seja, tacitamente, que a reta era ilimitada. Entretanto, ele mostrou que seria possível supor que uma reta pode ser infinita, mas limitada. Riemann assumiu no lugar do quinto postulado de Euclides o seguinte postulado: "Dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r, não existe nenhuma reta paralela a r que passe por P." (RIBEIRO, 2012, p.55)

Segundo Eves (2004, p.544), em 1871 Klein denominou as três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann; de geometria hiperbólica, geometria parabólica e geometria elíptica, respectivamente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nas últimas décadas observamos um crescimento das pesquisas relacionadas a História das Ciências e em especial a História da Matemática. Mendes e Chaquiam (2016, p. 77) destacam que esse desenvolvimento se constitui em um valioso elemento para a melhoria do ensino e aprendizagem da Matemática nas diferentes áreas e níveis, permitindo compreender as origens das ideias que deram forma a nossa cultura, assim como, observar os diversos aspectos do seu desenvolvimento, e perceber que as teorias que hoje aparecem acabadas e elegantes, resultaram de desafios enfrentados com grandes esforços e, em grande parte, numa ordem diferente daquela apresentada após todo o processo de formalização.

Neste sentido, a utilização da História da Matemática em sala de aula através do diagrama metodológico elaborado por Chaquiam (2017) se constitui em uma possibilidade para o estudo de Geometria. Os caminhos propostos oportunizam ao aluno visitar ou revisitar os cenários sociocultural, pluridisciplinar e técnico-científico do período recortado relacionado ao ensino da Geometria e ao personagem destacado, Lobachevsky.

Sugerimos que o professor utilize esta metodologia a partir da construção do diagrama e em seguida, disponibilize o material escrito como suporte teórico para ensino e aprendizagem de Geometria.

Nosso objetivo foi subsidiar o leitor com caminhos que possibilitem a construção de uma história, articulada ao desenvolvimento histórico do conteúdo matemático, bem como a demarcação do tempo e espaço na história da humanidade para extrapolar a visão internalista da matemática, tendo em vista sua utilização em sala de aula.

Neste passeio pelas Geometrias, desde Euclides até Riemann, concluímos que é possível elaborar textos de história da matemática a partir do diagrama metodológico e com possibilidades de uso como recurso didático em sala de aula no ensino de matemática.

Logo, sugerimos a construção de outros diagramas metodológicos deste mesmo tema, Geometrias, que envolvam outros personagens e contexto mundial para que tenhamos a perspectiva de aprofundamento deste trabalho o qual acreditamos que não se

esgota aqui.

REFERÊNCIAS

BONOLA, Roberto. **Non-Euclidean Geometry**. Editora: Dover Science, 1954.

CHAQUIAM, Miguel. **História da Matemática nas aulas de Matemática: uma proposta para professores.** Anais do XII Seminário Nacional de História da Matemática. Itajubá (MG): SBHMat, 2017.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos:** história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo. Editora da Unicamp, 2004.

FERNANDES, Cláudio. **“Independência do Brasil”: História do Mundo.** Disponível em: http://historiadomundo.uol.com.br/idade-contemporanea/independencia-brasil.htm. Acesso em 09 de abril de 2017.

GILLISPIE, Charles Coulston. **Dicionário de biografias científicas**. Tradução de: Carlos Almeida Pereira. Título original: Dictionary of scientific biography. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

JANOS BOLYAI. In: Universidade de Coimbra. Disponível em: http://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/copy_of_matematicos/Bolyai-J. Acesso em 11 de abril de 2017.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Fundação Calouste Gulbenkian: Lisboa, 2010.

MACIEL, Willyans. **“Immanuel Kant”: InfoEscola.** Disponível em: http://www.infoescola.com/biografias/immanuel-Kant/. Acesso em 11 de abril de 2017.

MATOS, Edilande Rodrigues; NEVES, Raul Edgar Borges das. **A Geometria Euclidiana e as Geometrias Não-Euclidianas.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2010.

MELLO, Vico Denis S. de; DONATO, Manuela Riane A. **“O Pensamento Iluminista e o Desencantamento do Mundo: Modernidade e a Revolução Francesa como marco paradigmático”.** Revista Crítica Histórica, ano II, nº 4, dez. 2011.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores.** Belém: SBHMat, 2016.

PACIEVITCH, Patrícia. **“Iluminismo”: InfoEscola.** Disponível em http://www.infoescola.com/historia/iluminismo/. Acesso em 09 de abril de 2017.

RIBEIRO, Renato Douglas Gomes Lorenzetto. **O ensino das geometrias não-euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica.** Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

CAPÍTULO 3

PUZZLES MATEMÁTICOS COMO ESTRATÉGIA FACILITADORA DA APRENDIZAGEM

Data de aceite: 17/02/2021

Wharton Martins de Lima
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, Campus Natal Central
Natal – Rio Grande do Norte
ID Lattes: 5155469745591404

Davis Rytle Lira Martins
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, Campus Natal Central
Natal – Rio Grande do Norte
ID Lattes: 8900140329245168

Jamilson Pinto de Medeiros
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, Campus Natal Central
Natal – Rio Grande do Norte
ID Lattes: 2614594974375901

João Pedro Nogueira da Silva
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, Campus Natal Central
Natal – Rio Grande do Norte
ID Lattes: 68193787052269025

Sérgio Barbosa da Penha
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, Campus Natal Central
Natal – Rio Grande do Norte
ID Lattes: 2410160729229247

William Gomes dos Santos
Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN, Campus Natal Central
Natal – Rio Grande do Norte
ID Lattes: 3635134129559260

RESUMO: O presente trabalho foi desenvolvido com base em minha experiência profissional como professor a 45 anos e também baseado na literatura que aborda a importância do lúdico na matemática. Ele tem como principal objetivo fazer uma análise e reflexão sobre a importância de se trabalhar com o lúdico no ensino de matemática, enfatizando principalmente as contribuições encontradas nesse processo, reforçando que o lúdico pode e deve ser uma ferramenta positiva no ensino da matemática. Ressalta-se também a sua contribuição nas aulas de matemática, tanto para o professor quanto para o aluno, principalmente nos primeiros anos do ensino fundamental e Médio, uma vez que o lúdico beneficiará de maneira significativa para o desenvolvimento intelectual e potencial de cada aluno. Apresentar ainda que, por intermédio do lúdico inserido no ensino de matemática, trará um resultado positivo com relação ao aprendizado dos alunos, pelo ato de brincar e jogar. Conceituar o termo Lúdico como sendo qualidade daquilo que estimula através da fantasia, do divertimento ou da brincadeira, na visão de alguns autores é reforçar esses conceitos, percebendo o quanto o ato de brincar é importante para o desenvolvimento intelectual e cognitivo dos estudantes ainda crianças, e mais ainda citar alguns jogos que auxiliam no processo

de alfabetização matemática, bem como suas contribuições nessa área do conhecimento matemático.

PALAVRAS - CHAVE: Lúdico, Aprendizagem Matemática, e Educação Matemática.

MATHEMATICAL PUZZLES AS A FACILITATING STRATEGY FOR LEARNING

ABSTRACT: This work was developed based on my professional experience as a teacher for 45 years and also based on literature that addresses the importance of playfulness in mathematics. It has as main objective to make an analysis and reflection on the importance of working with the ludic in the teaching of mathematics, emphasizing mainly the contributions found in this process, reinforcing that the ludic can and should be a positive tool in the teaching of mathematics. It is also noteworthy its contribution in mathematics classes, both for the teacher and for the student, especially in the first years of elementary and high school, should also be emphasized, since the ludic will benefit significantly to the intellectual and potential development of each student. Also present that, through the play inserted in the teaching of mathematics, will bring a positive result in relation to the students' learning, through the act of having fun and playing. Conceptualizing the term Playful as being the quality of what stimulates through fantasy, fun or play, in the view of some authors is to reinforce these concepts, realizing how important the act of playing is for the intellectual and cognitive development of students as children, and even more to mention some games that help in the process of mathematical literacy, as well as their contributions in this area of mathematical knowledge.

KEYWORDS: Playful, Mathematical Learning, and Mathematical Education.

INTRODUÇÃO

De acordo com as novas tendências educacionais, entende-se que é necessário reformular as metodologias adotadas no processo de ensino aprendizagem, de modo a favorecer o inter-relacionamento entre o saber e o saber-fazer. Atender tal premissa, implica em privilegiar um ensino em que se contempla o significado que são o saber e o fazer, para o aprendiz.

Isto não sugere que o ensino deve se prender a uma metodologia essencialmente prática, mas de trazer a prática para falar da teoria, pois é através da prática que o conhecimento evolui. Esta dissociação entre prática e teoria tem sido motivo de várias pesquisas, as quais apontam para incongruências não justificáveis, como o fato de indivíduos responderem corretamente a determinadas situações problemas e quando estes são apresentados dentro de um contexto não sabem como resolver ou vice-versa.

Sou professor de matemática a 45 anos e tenho ouvido muito "O aluno não tem base ", tanto no ensino fundamental como no superior e aí pergunto, o que fiz para alterar este quadro? Procurei estudar para ter uma melhor fundamentação teórica para tentar me transformar em um educador matemático no sentido de propiciar aos meus alunos uma maneira de preencher as lacunas cognitivas e promover um salto Arquimediano quanto

à possibilidade da compreensão, promovendo assim um processo de desequilíbrio e proporcionando novos conhecimentos para uma nova acomodação e proporcionando a possibilidade de novas compreensões.

OBJETIVO DESTA OFICINA

O uso dos jogos educativos no ensino da Matemática tem objetivos de fazer com que os alunos gostem de aprender essa disciplina, mudando a rotina da classe e despertando o interesse do aluno envolvido. A aprendizagem através de jogos que envolve estratégias que são a base do pensamento matemática, como labirintos, de encaixe, de memória, permite que o aluno faça da aprendizagem um processo interessante e até divertido. Para isso, eles devem ser utilizados ocasionalmente para sanar as lacunas que se produz na atividade escolar diária.

- Introduzir, amadurecer conteúdos e preparar o aluno para aprofundar os itens já trabalhados. Como função de fixação de conteúdos
- Utiliza-los como facilitadores, colaborando para trabalhar os bloqueios que os alunos apresentam em relação a alguns conteúdos matemáticos, Como função de formação de conceitos.
- Como função de fixação recreativa de conteúdos e ainda possibilitar ia ajuda mutua entre os participantes.
- Desenvolver o raciocínio lógico, abstrato e criatividade. \

METODOLOGIA

Compreendendo que a ação educativa utilizando meios lúdicos, cria um ambiente gratificante para o desenvolvimento integral do educando. De acordo com Piaget “o jogo consiste em satisfazer o eu por meio de transformação do real em função dos desejos”. Ou seja, tem como funções assimilar a realidade.

A partir desta posição apresento alguns jogos matemáticos onde nos mesmos procuro evidenciar as possibilidades de formação de conceitos; a aplicação de conceitos e recreação utilizando também situações análogas.

As atividades que gostaria de apresentar seriam as seguintes:

- JOGO DA VELHA NUMÉRICO: Tem como objetivo resgatar conceito básicos das operações fundamentais e também desenvolvimento do cálculo mental e tomada de decisão. Formado por quatro tabuleiros para fixação destas operações. Cada jogador escolhe um grupo de fichas, em seguida jogam dois dados alternadamente e realizam uma operação com intenção de escolher um resultado para marcar. Ganha a rodada aquele que colocar **primeiro três fichas** da mesma cor em linha reta em duas tabelas.

ADIÇÃO

1	4	5
9	3	7
2	8	6

SUBTRAÇÃO

1	2	5
3	3	4
2	5	0

MULTIPLICAÇÃO

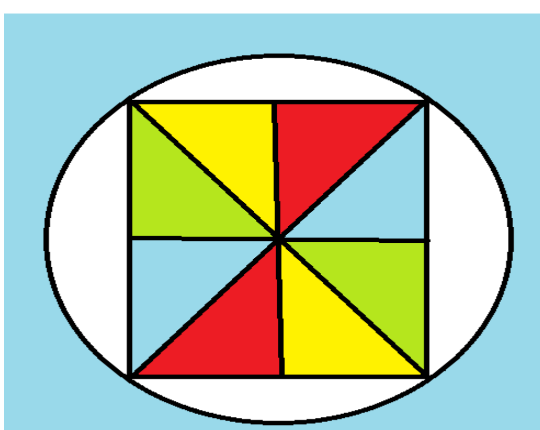
1	24	15
9	36	8
20	18	6

DIVISÃO

1/2	3/4	5
1	3	4/5
2	1/3	6

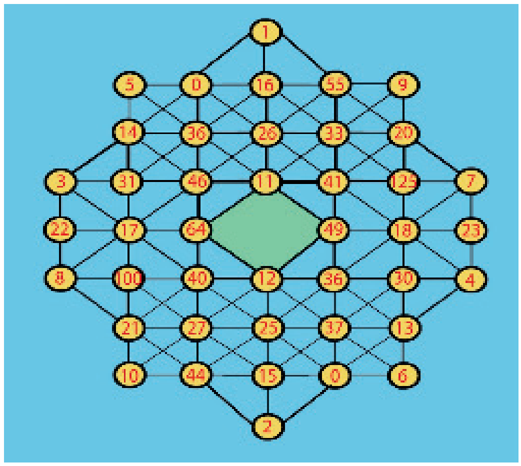
Material : Um tabuleiro, 16 marcadores (duas cores distintas) e dois dados.

- JOGO DA VELHA PLUS: Tem como objetivo desenvolver ideias sobre rotas e alinhamento das peças e retomando um diálogo sobre a teoria dos grafos. Os deslocamentos das peças serão sobre linhas retas e circulares como forma de desenvolver o raciocínio básico sobre rotas onde a partir desta atividade temos a intenção de iniciar o estudo sobre teoria dos grafos.



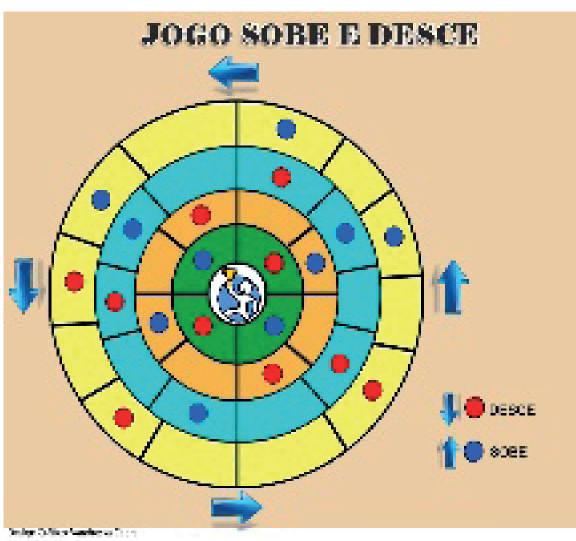
Material: Tabuleiro e 6 Marcadores.

- CALCFORM: O objetivo desta atividade é por intermédio da ludicidade, proporcionar o cálculo mental e fixar conceitos das operações matemáticas e também conceitos geométricos. Entende-se que a matemática lúdica é uma possibilidade para aquisição de novos conceitos matemáticos, onde os alunos poderão na atividade usar concomitantemente as operações de adição, subtração, multiplicação, Divisão, Potenciação, Radiciação e Fatorial e podendo acrescentar outras em função do grupo que esteja participando.



Material: 4 dados, 10 marcadores azuis, 10 vermelhos, 10 verdes e 10 amarelos

- JOGO DO SOBE E DESCE: Tem como objetivo desenvolver ideias básicas sobre probabilidade.



Material: Tabuleiro, 4 Marcadores de Cores distintas e 1 dado

Esta atividade do jogo sobe e desce tem como objetivo principal análise de estratégia associada a probabilidade. Com o uso de um tabuleiro e de dois dados e dois, três ou quatro alunos colocarão seus marcadores no primeiro anel e lançarão alternadamente seus dados, observando os resultados das faces superiores que representará o deslocamento em cada nível do anel. Os marcadores terão como objetivo chegar ao centro da figura. Cada grupo deverá jogar uma sequência de cinco partidas.

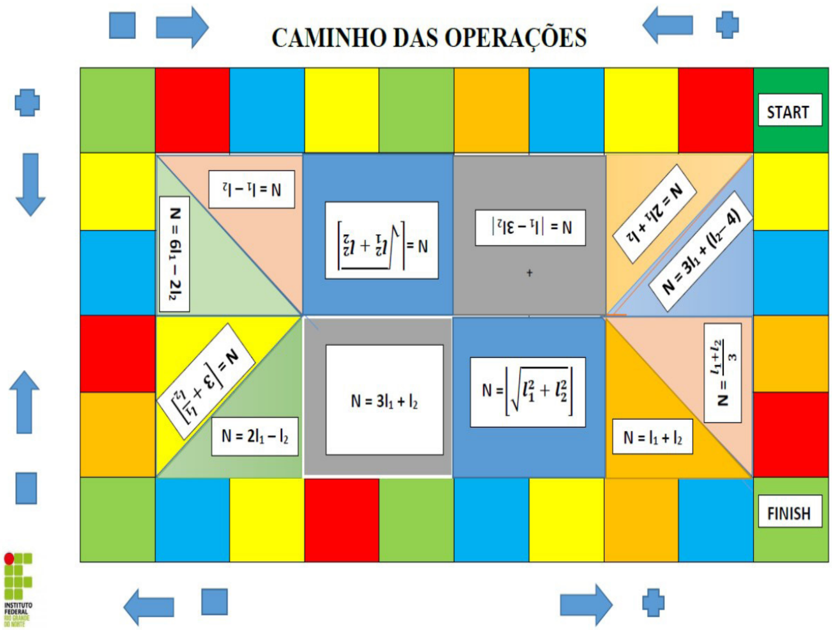
- JOGO DO ALIADO: Uma atividade lúdica que envolve conceitos de contagem e análise de distribuição quantitativa que melhor possibilite o acesso ao centro do tabuleiro que caracteriza a vitória



O desenvolvimento da partida consiste em um confronto de duplas onde durante o seus desenvolver a análise de probabilidade aparece com bastante frequência. O seu desenvolvimento consiste no uso de quatro marcadores por cada participante com objetivo de atingir o centro do tabuleiro e dois dados para a contagem e deslocamento das peças no tabuleiro.

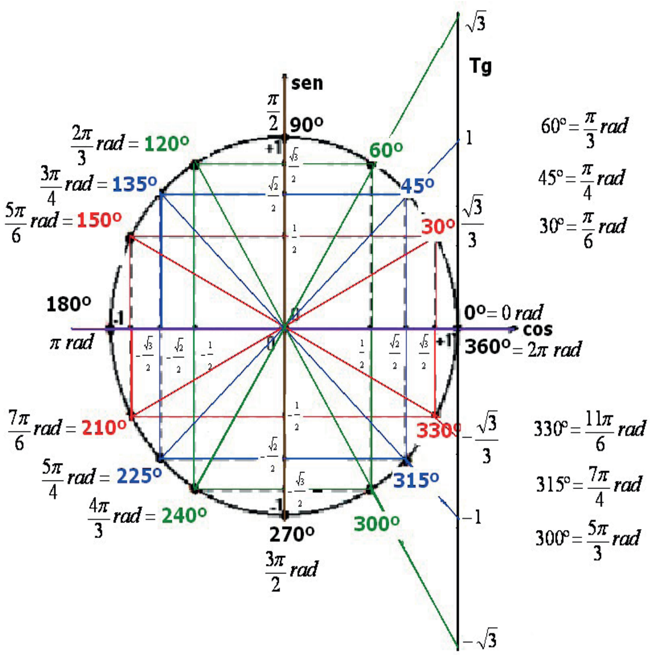
Observação: Este jogo é originário da época da segunda grande guerra e foi criado pelos marinheiros.

- JOGO CAMINHO DAS OPERAÇÕES. Esta atividade tem como objetivo principal criar situações que ampliem o campo numérico através das operações matemáticas e como objetivo lúdico é o percurso de uma trilha com expressões numéricas



Material: Tabuleiro, 4 Marcadores de Cores distintas e 2 dados.

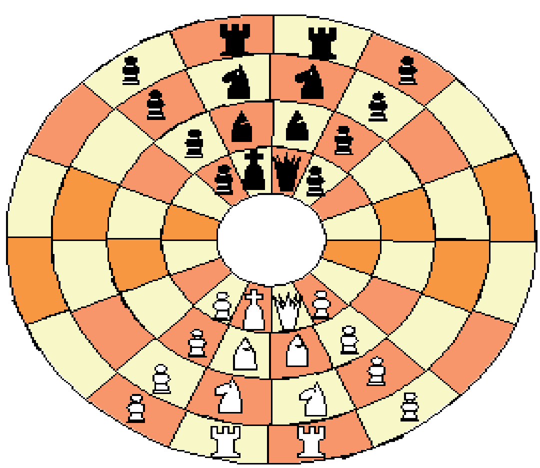
- TRIGONOPLANO. Esta atividade tem como objetivo principal criar situações que ampliem o conhecimento das relações trigonométricas, possibilitando a compreensão destas relações através da simetria entre arcos e ângulos e também utilizando na solução das equações trigonométricas



Material: Tabuleiro, 16 Marcadores de Cores distintas (4 azuis, 4 Vermelhas, 4 Verdes e 4 amarelas) e Bloco de tarefas.

- 8. XADREZ BIZANTINO. Esta atividade tem a finalidade de mostrar novas possibilidades de se jogar xadrez. O tabuleiro circular proporciona uma visão diferenciada e semelhante a teoria dos grafos, onde as trajetórias não são necessariamente lineares.

OBS: As peças mantem suas formas originais de deslocamento; a mudança está nas trajetórias.



DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE:

- Atividade para 20 participantes.
- Formando no máximo 5 grupos de 4 pessoas.
- Tempo de duração 3 h ou 2X 1,5h.
- Necessito de folhas A3 e lápis grafite e borracha.
- Podendo utilizar calculadora.
- Os tabuleiros e material (dados e marcadores) serão levados pelo apresentador da oficina

CONCLUSÕES

Tenho observado que com a evolução dos games na sua fase inicial houve um recuo dos jogos de tabuleiro, no entanto no decorrer dos três últimos anos observei também um crescimento bastante significativo das atividades lúdicas como ação pedagógica e com isto abrindo uma nova frente com materiais alternativos, que diminuem as repetições e possibilitam uma maior variedade de alternativas na busca das soluções ; proporcionando a pluralidade dos caminhos como formas mais interessante no processo lógico da busca de soluções de situações problemas. Tenho tido a oportunidade de apresentar alguns desses jogos nos últimos três Congressos Internacionais das Licenciaturas (COINTER). A partir destes encontros tenho mantido contanto com vários estudantes e professores, que me proporciona um feedback constante para análise dos mesmos.

REFERÊNCIAS

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME-USP;1996.

BRASIL. SECRETARIA DA EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - Brasília: MEC / SEF, 1998.

FUENTES, M. T. M. **Evolução do jogo ao longo do ciclo vital**. In: MURCIA, J. A. M. et col. **Aprendizagem através do jogo.** Porto Alegre: Artmed, 2005. p. 29 - 44.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo brinquedo, brincadeira e educação.** São Paulo: Cortez, 2003.

MURCIA, J. A. M. et col. **Aprendizagem através do jogo.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

ORTIZ, J. P. Aproximação teórica à realidade do jogo. In: MURCIA, J. A. M. et col. **Aprendizagem através do jogo.** Porto Alegre: Artmed, 2005. p.9-28.

PIAGET, Jean. Epistemologia Genética. Tradução: Álvaro Cabral. 3ª ed. Martins Fontes: São Paulo, 2007.

___________. Seis estudos de Piaget. Tradução: Maria Alice Magalhães D'Amorim e Paulo Sérgio Lima Silva. 25ª ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2011.

PONTE, J. P. & SERRAZINA, M. L. **Didática da Matemática do primeiro ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000, p.11–20.

CAPÍTULO 4

AS DIFICULDADES DA MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 05/01/2021

Francisca Missilene Muniz Magalhães
UEPA Seduc
Belém-Pará
http://lattes.cnpq.br/7828473095585146

Pedro Franco de Sá
UEPA
Belém-Pará
http://lattes.cnpq.br/4323922632919962

RESUMO: Este trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa que teve como objetivo analisar as dificuldades da disciplina de matemática nos anos iniciais da educação básica, a partir da visão dos docentes da rede pública estadual de Belém-PA. A metodologia teve como base uma pesquisa de campo realizada por meio da aplicação de 143 questionários aos professores dos anos iniciais. A produção das informações permitiu inferir que, segundo os docentes, as maiores dificuldades nos anos iniciais estão relacionadas a leitura e compreensão de conceitos e enunciados, a maturação do desenvolvimento cognitivo dos estudantes, a metodologia e prática docente desenvolvidas pelos professores. Assim, o que torna a matemática a fácil ou difícil é o caminho estabelecido no processo de ensino e aprendizagem em cada ciclo escolar. Reconhecer o ensino de matemática que se oferta, identificando as dificuldades que interferem nos resultados são fundamentais para a construção de um ensino de qualidade.

PALAVRAS - CHAVE: Disciplina de Matemática; Anos Iniciais; Dificuldades do Ensino.

THE DIFFICULTIES OF THE MATH IN THE ELEMENTARY SCHOOL

ABSTRACT: This work presents the results of a research that has the objective of analysing the math difficulties in the state public school from Belém – Pará, from the point of view of the teachers .The production of these information went through the application of 143 quizzes to the teachers of the elementar schoo that served in the research locus. The results of the analysis corpus about mathematics teaching revealed that the main difficulties in the elementar school are related to reading and compreheension of concepts and question commands, the maturation of cognitive development, and the methodology and practice developed by teachers. Therefore, the difficulties reveal themselves heavily in the early years and vanquish at the end of the school cycle. Recognizing the mathematics education that is offered, identifying the difficulties that interfere with the results are fundamental for the construction of quality education.

KEYWORDS: Math Discipline; Elementary School; Teaching Difficulties.

INTRODUÇÃO

O ensino da matemática é imprescindível para a sociabilidade dos indivíduos, visto que a mesma está presente em várias facetas da vida humana, e é por isso que a matemática

ganha importância na escola, pois forma crianças, jovens e adultos capazes de exercer a verdadeira cidadania, a que integra direitos e deveres sem discriminação social.

Apesar disso, a matemática escolar geralmente é criticada por ser uma disciplina complexa e inquestionável. E consequentemente, é na escola que se dissemina o discurso de que a matemática é uma disciplina difícil, de que não é para todos, tornando-a assim seletiva. Muitas vezes, só o medo de a enfrentar, desestimula e afasta o sujeito de conhecer o real sentido da matemática para a vida.

Assim, o presente trabalho apresenta os resultados de uma pesquisa realizada no mestrado em educação da Universidade do Estado do Pará, que teve como objetivo analisar as dificuldades da disciplina de matemática nos anos iniciais da educação básica, a partir da visão dos docentes da rede pública estadual de Belém-PA.

A TRILHA METODOLÓGICA

O percurso metodológico foi um dos pontos fundamentais para o alcance dos objetivos propostos nesse estudo. A escolha dos materiais e métodos determinaram a forma de construção do trabalho e projetaram na sua aplicação nas análises e resultados da investigação.

Para compreensão sobre as dificuldades no ensino de matemática, foram realizados estudos para aprofundamento da temática. Esse levantamento foi importante para revelar as atuais discussões acerca do ensino de matemática e identificar as premissas que circulam as dificuldades de se ensinar matemática no âmbito educacional.

Os estudos selecionados para a fundamentação teórica foram os das autoras Silveira (2002), Eberhardt e Coutinho (2011), Resende e Mesquita (2013), pois demonstraram a existência de dificuldades do ensino da matemática no ambiente escolar.

Após a fundamentação teórica, estabeleceu-se a pesquisa de campo, que possibilitou obter informações e determinar os resultados sobre o ensino de matemática nos anos iniciais na rede pública de Belém do Pará, a partir da visão dos docentes.

O instrumento escolhido para a coleta dos dados foi o questionário. Marconi e Lakatos (2004, p. 201) definem o questionário como sendo "um instrumento de coleta de dados, constituído por uma série ordenada de perguntas, que devem ser respondidas por escrito e sem a presença do entrevistador".

A intensão da escolha do questionário se deu pela possiblidade de atingir um grande número de pessoas simultaneamente, em uma extensa área geográfica, garantir o anonimato dos entrevistados, e com isso, ter maior liberdade, segurança e obter respostas mais rápidas e precisas.

O lócus de pesquisa escolhido foram escolas do centro de Belém do Pará que ofertavam a educação básica. Já a amostra de investigação foi composta pelos professores do 1º ao 5º ano que ministravam aulas de matemática nos anos iniciais do ensino

fundamental.

O resumo da amostragem está expresso no quadro a seguir:

ANOS	TOTAL DE TURMAS	UNIDADES COLETADAS	PORCENTAGEM
1º ano	48	43	89%
2º ano	43	33	76%
3º ano	39	32	82%
4º ano	27	16	59%
5º ano	32	19	59%
TOTAL	189	143	76%

Quadro 1 – Resultado da coleta dos questionários

Fonte: Pesquisa de campo, A autora, 2018.

Do total das 189 turmas previstas para fazer parte desse estudo, foi possível alcançar 76% da amostra, o que foi um número significativo mediante as dificuldades enfrentadas na aplicação da pesquisa de campo. Contudo, a amostra foi o suficiente para garantir a validação das informações deste estudo. Posterior à aplicação e recolhimento, os questionários foram agrupados para a estratificação e organização das informações e definição dos resultados.

Matemática: uma disciplina difícil?

Atualmente, se discute muito a defesa de um ensino em que a matemática tenha um sentido e significado real e que seja humanizada. Conforme Bicudo (1999, p. 29, apud LOSS, 2016. 57) enfatiza que seria uma matemática compreendida como um "projeto do humano e suas possibilidades de ser mundano e temporal, projeto que lança o homem no seu sendo, portanto, no seu agindo, permitindo que as possibilidades humanas se atualizem".

Assim, Loss (2016) coloca que, "nessa perspectiva, a educação matemática presentifica a interlocução entre os objetos matemáticos e a realidade para projetar compreensões e significar o pensamento". Contudo, é a lógica da pedagogia tradicional ou liberal que está intimamente presente no ensino de nossas escolas.

Introduzir um olhar diferenciado para a matemática nos anos iniciais, visando não mais a simples transmissão de fórmulas e resultados exatos, abre um leque de possibilidades para transformar o ensino em algo prazeroso e produtivo no âmbito escolar.

Silveira (2002) é uma autora que discute sobre o mito de que a matemática é difícil. Em sua pesquisa, a autora revela o sentido pré-construído em falas de professores e alunos acerca da matemática vivenciada na escola. Aponta que a matemática ocupa o

lugar da disciplina que mais reprova o aluno na escola, e que a justificativa se dá pela "incapacidade" do aluno em lidar com matemática. A autora ainda confere ao senso comum o aval de a matemática ser considerada uma disciplina difícil.

Para Silveira (2002) a "matemática difícil" é um construto histórico disseminado na escola pela voz de professores e alunos, e que representa um sentido pré-construído do conceito que se revela mais como um mito do que como um fator real.

Os estudos de Silveira (2002) apontam que a "*Matemática é difícil*", no sentido de que é "*complicado*", e que isso foi reconhecido não apenas pelos alunos, mas também no contexto histórico da disciplina, bem como identificado na voz dos professores e da mídia. A autora ressalta ainda que, na visão dos professores, "para despertar o prazer de aprender Matemática" se propõe "a Matemática des-com-pli-ca-da". Assim, o estudo realizado sobre as dificuldades de matemática aponta que,

> A análise das formulações discursivas dos alunos quando falam desta dificuldade, bem como os fatos históricos que contribuíram para que este pré-construído que diz "matemática é difícil" e por consequência "matemática é para poucos" mantivesse seus resquícios ao longo do tempo, manifestado, assim por toda comunidade escolar e pela mídia, se faz necessário. A re-significação do pré-construído é uma interpretação da dificuldade da matemática, mas que mesmo mostrando facetas diferentes, corrobora com a sua manutenção. (SILVEIRA, 2002, p.01).

Nesse sentido, a matemática escolar ao longo do tempo, foi julgada com uma disciplina difícil, praticamente inalcançável por muitos, provavelmente pela exigência de cálculos precisos, pelo esforço do raciocínio matemático, pelo domínio da resolução de problemas e pelo status que concedia a quem a dominava. Esse pensamento reflete na matemática aplicada hoje na escola, que mais exclui do que forma sujeitos habilitados a usar a matemática em benefício da sociedade.

Já as autoras Eberhardt e Coutinho (2011) fizeram um estudo acerca das principais dificuldades de aprendizagem da matemática nos anos iniciais de escolarização. Apresentaram uma abordagem informativa sobre a construção do conhecimento lógico-matemático através da teoria psicogenética de Piaget e procuraram comparar ocorrências de aprendizagem na realidade escolar através de uma pesquisa de campo.

As dificuldades no ensino de matemática de acordo com Eberhardt e Coutinho (2011) ocorrem por diferentes fatores que ocorrem no desenvolvimento da criança. De acordo com a teoria psicogenética, há etapas de aprendizagem que precisam ser respeitadas, pois os indivíduos não se desenvolvem igualmente no mesmo nível e tempo. As autoras demonstraram assim, que nem todas as dificuldades decorrem do conteúdo matemático, mas que vão além, como o desenvolvimento da linguagem, os fatores cognitivos estruturados e até aspectos externos à escola.

Resende e Mesquita (2013) também realizaram uma pesquisa com professores e alunos de matemática do ensino fundamental e médio com a finalidade de diagnosticar

as principais dificuldades encontradas no processo ensino-aprendizagem, suas causas e sugestões de mudanças, confrontando escolas públicas e particulares do município de Divinópolis (MG). O estudo foi feito por meio da pesquisa participativa, entrevistas e questionários. O objetivo das autoras era identificar na voz de professores e alunos informações que apontassem onde se encontram as dificuldades com a matemática.

A pesquisa de Resende e Mesquita (2013), revelou que os alunos se identificam sim com a matemática e acham a disciplina interessante, mas que a dificuldade se evidencia na leitura e compreensão de enunciados e problemas. Já na visão dos professores, as dificuldades se encontram na falta de base dos alunos e em conhecimentos que precedem conteúdos mais complexos. Essa dificuldade acaba quebrando o ciclo de continuidade planejada pelos professores e os limitam a também dar continuidade ao ciclo planejado para a disciplina.

As pesquisas realizadas por Silveira (2002), Eberhardt e Coutinho (2011) e Resende e Mesquita (2013) corroboram a ideia de o ensino de matemática apresentar dificuldades a serem enfrentadas no contexto escolar, e a ideia de que “a matemática difícil” pode se constituir um mito discursivo com marca histórica, na medida em que o medo e pavor, diante da disciplina, se disseminam na fala da escola como um todo.

As pesquisas também revelam que as dificuldades vão além do ensino da matemática no seu sentido propedêutico, visto que perpassa pelo processo de alfabetização da criança. Identificar números não é o suficiente para compreender as relações e conexões que os números estabelecem em seus os enunciados ou com a vida real.

O desenvolvimento da educação no Brasil passa pela escola com a garantia constitucional de um ensino público, gratuito e obrigatório. Portanto, se faz necessário garantir que o ensino seja de efetiva qualidade, que forme cidadãos participativos capazes de interferir e transformar sua própria realidade e contribuírem de forma significativa com uma sociedade consciente de seus deveres e direitos.

Assim, entende-se que o ensino de matemática perpassa pela formação do ser humano na sua completude cognitiva, pois pensar matematicamente é fundamental para o desenvolvimento de habilidades que são exigidas na vida em sociedade.

RESULTADOS E ANÁLISE DOS DADOS

Ao investigar o ensino de matemática nos anos iniciais da rede pública estadual de Belém, buscou-se compreender, a partir da visão dos professores, as dificuldades do ensino de no cerne da matemática escolar.

O professor dos anos iniciais tem a importante missão de formar crianças, e essa etapa é fundamental para a aprendizagem. De acordo com Eberhardt e Coutinho (2011), o conhecimento lógico-matemático é baseado nas relações em que o sujeito descobre a partir de objetos ou fatos e, nessa relação, o professor é o problematizador da aprendizagem.

A matemática na escola geralmente é vista como uma disciplina difícil, conforme afirma Silveira (2002). Sobre esse tema, perguntou-se a opinião dos professores se concordam ou não que a disciplina de matemática é difícil.

DISCIPLINA DIFICIL	1º ANO		2º ANO		3º ANO		4º ANO		5º ANO		TOTAL	
	U	%	U	%	U	%	U	%	U	%	U	%
Sim	22	51	20	61	24	75	7	43,75	0	0,00	73	51,05
Não	21	49	10	30	6	19	9	56,25	19	100	65	45,45
Não informaram	0	0	3	9	2	5	0	0,00	0	0,00	5	3,50
TOTAL	43	100	33	100	32	100	16	100	19	100	143	100

Quadro 2 – A opinião dos professores sobre a Matemática ser considerada uma disciplina difícil

Fonte: Pesquisa de campo, A autora, 2018.

Ao que diz respeito se a matemática é uma disciplina difícil ou não, o resultado que os professores apresentaram nos itens sim e não ficaram aproximados, sendo que a maioria de 51% dos docentes concordou que sim, a matemática é uma disciplina difícil, e 45% disseram que não é uma disciplina difícil.

E ao analisar o quadro 2 por ano escolar, as dificuldades do ensino da matemática se evidenciam com resultados maiores a 50% nos três primeiros anos da escolarização. O primeiro ciclo dos anos iniciais, que corresponde aos primeiros três anos, as crianças podem ainda não compreenderem e dominarem as formações e estruturas dos conteúdos da disciplina, tornando-se mais difícil, nesses anos de ensino. Contudo, observa-se que, as dificuldades são menores nos quartos e quintos anos, chegando a ser indicada como 100% fácil de acordo com os professores do quinto ano.

Os professores registraram, em perguntas abertas, que há vários motivos que tornam o ensino de matemática fácil ou difícil. Assim, foram selecionados apontamentos importantes que contribuíram significativamente para a compreensão das dificuldades acerca do ensino de matemática nos anos iniciais.

De acordo com os professores que acham que a matemática é difícil, há vários argumentos que justificam as dificuldades no ensino dessa disciplina. Entre as justificativas mais citadas pelos docentes está a dificuldade com a resolução de cálculos e fórmulas pré-determinadas, o que caracteriza a matemática como disciplina exata e pouco flexível nas formas de pensar a resolução. É uma disciplina que exige raciocínio lógico e que, portanto, também exige um pouco mais do desenvolvimento cognitivo do aprendiz.

Porém, os professores enfatizam que as dificuldades dependem muito do conteúdo a ser ensinado, pois se o conteúdo não for bem apresentado e consolidado na base, os estudantes terão dificuldades de compreender e aplicar no seu dia a dia. "*Ela se torna difícil*

quando a forma de ensinar não consegue construir os conceitos e associar a praticidade do assunto, mas quando os alunos compreendem não conseguem esquecer". (PESQUISA DE CAMPO, 2018).

Outro dado importante citado pelos professores diz que a disciplina se torna difícil quando o aluno ainda não domina o processo de leitura e de escrita. A leitura e a escrita são fundamentais para a aprendizagem de qualquer disciplina para que os educandos possam compreender o texto e contexto em que se situa o conteúdo. De acordo com um professor do terceiro ano, a matemática não é difícil, "*só precisamos aprimorar mais a interpretação de textos variados com os alunos".* (PESQUISA DE CAMPO, 2018).

Os professores também registram que o seu processo de formação influenciou diretamente na forma como ensinam a matemática: "*A formação e a forma como eu aprendi visava o conceito e não a resolução de problemas, que* é *como trabalhamos hoje".* Nesse sentido, até os próprios professores podem sentir dificuldades com o ensino dos conteúdos de matemática e isso também pode refletir diretamente na formação das crianças.

No que se refere aos 45 % do resultado geral de professores que disseram que a matemática não é uma disciplina difícil, o argumento é que o ensino depende da atuação do professor e da linguagem utilizada para tornar os conteúdos prazerosos. Segundo os professores do primeiro ano, "*só depende da prática de cada um e junto ao lúdico funciona*". (PESQUISA DE CAMPO, 2018).

Os professores enfatizam ainda a importância do trabalho com metodologias diferenciadas, aulas prática e o uso de materiais concretos:

> Não é difícil, deve-se trabalhar a matemática sempre levando em conta o conhecimento empírico do aluno para que possa facilitar sua aprendizagem. (Prof. 3º ano).
>
> Não acho difícil, acho que a disciplina tem um leque de opções a serem trabalhados. Ex. concreto, realidade do aluno, pesquisas. (Prof. 5º ano)
>
> Não é difícil, tudo depende do estimulo, se você incentiva seu aluno para os números da matemática, ele irá começar a gostar de estudar a matemática. (Prof. 5º ano) (PESQUISA DE CAMPO, 2018)

É recorrente na fala dos professores a presença do lúdico no ensino de matemática nos anos iniciais, o que aponta para ensino de matemática na perspectiva construtivista de educação. O construtivismo interacionista, segundo Crusius (1994, p. 169, apud FIORENTINI, 1995, p. 21) "é uma prática pedagógica na qual o papel do aluno consiste em ver, manipular o que vê, produzir significado ao que resulta de sua ação, representar por imagem, fazer comparações entre a representação e o objeto de sua ação real".

Cada aluno tem sua especificidade de aprendizagem, o que induz o profissional a buscar novos caminhos e métodos para o ensino. Nos anos iniciais, trabalha-se a

matemática de forma mais prática, e os jogos são importantes ferramentas de interação entre o ensino e a aprendizagem, como diz um professor do segundo ano: "*a matemática é muito gostosa de aprender e da forma como ensino meus alunos adoram e se sentem felizes*". (PESQUISA DE CAMPO, 2018).

A partir da fala dos professores, verifica-se que os docentes procuram superar as dificuldades no ensino de matemática através de metodologias que visam a interação, o lúdico e a construção do conhecimento da criança.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento do ensino da matemática, nos anos iniciais da rede pública estadual de ensino de Belém, segundo a opinião dos professores, perpassa por variadas dificuldades que permeiam o fazer docente e a aprendizagem dos educandos.

A compreensão de como se desenvolve os processos pedagógicos e didáticos em sala de aula é fundamental para que se possa conduzir a uma educação consistente, que produza resultados satisfatórios. Em que a educação não seja apenas a codificação de letras e números, mas que seja formadora de sujeitos ativos na sociedade.

A escola tem a função primordial de promover a interação entre o conhecimento e as relações sociais de sua comunidade escolar. A escola detém a responsabilidade de formar um público diversificado, advindos de todas as classes, raças, etnias entre outros, preparando-os para atender as demandas sociais vigentes.

Deste modo, reconhecer o ensino de matemática que se oferta, diagnosticar as lacunas que interferem nos resultados, identificar as dificuldades existentes, são fundamentais para a construção de um ensino de qualidade, na medida em que tomadas de decisões emergentes sobre os problemas educacionais trazem possibilidades de desenvolvimento da sociedade contemporânea.

REFERÊNCIAS

EBERHARDT, Ilva Fátima Neves; COUTINHO, Carina V. Scheneider**. Dificuldades de aprendizagem em matemática nas séries iniciais:** diagnóstico e intervenções. 2013. Disponível em: Acessado em: http://www.reitoria.uri.br/~vivencias/Numero_013/artigos/artigos_vivencias_13/n13_08.pdf Acesso: 10/10/2017.

Fiorentini, Dario. **Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil.** Revista Zctetiki, Ano 3, n°4/1995.

LOSS, Adriana Salete. **Anos iniciais:** Metodologia para o Ensino da Matemática. Porto Alegre. Editora Appris. Edição:01-2016.

MARCONI, M. De A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. Ed. São Paulo: Atlas, 2003.

RESENDE, Giovani; MESQUITA, Maria Da Gloria B. F. **Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de matemática em escolas do município de Divinópolis, MG.** 2011. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9841 Acesso em: 12/08/2017.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu. **"Matemática é difícil":** Um sentido pré-constituído evidenciado na fala dos alunos. 2002. Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf. Acesso em 12/10/2017.

CAPÍTULO 5

UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA DETERMINAR APROXIMAÇÕES PARA RAÍZES DE EQUAÇÕES ATRAVÉS DE MÉTODOS NUMÉRICOS

Data de aceite: 17/02/2021

Daniel Martins Nunes
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais

Fábio Mendes Ramos
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais

RESUMO: Este estudo discute a utilização do software GeoGebra no ensino de Matemática, especificamente em temas discutidos em disciplinas como Métodos Numéricos. Dessa forma, apresentamos alguns comandos e processos que podem ser utilizados durante o ensino de Aproximação de Raízes pelos métodos de Bisseção, Ponto Fixo, Newton-Raphson e Secantes. Além disso, divulgamos um aplicativo construído com o auxílio do GeoGebra que permite a interação do usuário, obtendo respostas precisas para os problemas de cálculo numérico em poucas etapas. De modo geral, observamos que o GeoGebra é uma ferramenta importante para o processo de ensino-aprendizagem da disciplina, pois permite observar o comportamento de funções transcendentais e que as aproximações geradas por ele são precisas assim como as que são determinadas por outros softwares utilizados na área.

PALAVRAS - CHAVE: GeoGebra, Métodos Numéricos, Aproximação de Raízes.

USING GEOGEBRA TO DETERMINE APPROXIMATIONS FOR EQUATION ROOTS THROUGH NUMERICAL METHODS

ABSTRACT: This study discusses the use of GeoGebra software in the teaching of Mathematics, specifically on topics discussed in disciplines such as Numerical Methods. In this way, we present some commands and processes that can be used during the teaching of Root Approach by the methods of Bisseção, Ponto Fixo, Newton-Raphson and Secantes. In addition, we disclose an application built with the help of GeoGebra that allows user interaction, obtaining precise answers to numerical calculation problems in a few steps. In general, we observed that GeoGebra is an important tool for the teaching-learning process of the discipline, as it allows observing the behavior of transcendental functions and that the approximations generated by it are accurate as well as those determined by other software used in area.

KEYWORDS: GeoGebra, Numerical Methods, Root Approximation.

INTRODUÇÃO

Durante o ensino fundamental e médio é comum a abordagem de resolução de equações que nos conduzem a determinação de suas soluções por meio de fórmulas diretas, tais como, as equações quadráticas que emprega a fórmula de Bháskara. Algumas dessas equações não apresentam uma solução exata, como por exemplo a equação 1 a seguir:

$$x^2 - 2x - 5 = 0 \quad (Equação\ 1)$$

Cujas raízes poderiam ser dadas pelos valores: $x = 1 \pm \sqrt{6}$, ou, aproximadamente, $x' = 3{,}44948974278$ e $x'' = -1{,}4494897427$. Entretanto, estas equações quadráticas, exponenciais, logarítmicas, dentre outras, comumente ensinadas durante esta etapa do ensino,são, por vezes, facilmente determinadas por meio da utilização de procedimentos algébricos específicos e que podem resultar em valores exatos ou aproximados como apresentamos anteriormente.

No ensino superior a situação muda, pois geralmente nos cursos daárea de exatas estabelecem situações em que estes métodos não podem ser empregados para determinar as soluções das equaçõesobtidas por meio de modelagem matemática. Por exemplo, adotando para o modelo de crescimento populacional de uma certa região a função a seguir:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha t} + \frac{v}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \quad (Equação\ 2)$$[1]

Em que $N(t)$ denota o número de habitantes no instante t, N_0 o número de habitantes no momento inicial, v a taxa de imigração suposta constante e a taxa de natalidade. Agora, supondo que uma população tenha inicialmente 1000 000 de indivíduos, que 435 000 imigrem para a comunidade no primeiro ano, e que 1 564 000 indivíduos estejam presentes após decorrido um ano, para determinar a taxa de natalidade dessa população devemos resolver a equação a seguir em função de a :

$$1\,564\,000 = 1\,000\,000 e^{\alpha} + \frac{435\,000}{\alpha}(e^{\alpha} - 1) \quad (Equação\ 3)$$

Dessa forma, os métodos algébricos que costumávamos utilizar não são suficientes para resolver situações como esta. Em detrimento a esta impossibilidade, foram desenvolvidos métodos numéricos para determinar a solução de equações como apresentada anteriormente.

Os métodos numéricos empregados como o de Bisseção, Ponto Fixo, Newton e Secantes são metodologias diferentes, mas que utilizam o mesmo princípio, a iteração (ou repetição) do processo de determinar aproximações para as raízes de equações.

Chamamos de iteração o processo que envolve o uso de fórmulas repetidas vezes até que o resultado obtido atinja uma precisão previamente estabelecida. Assim, a cada etapa realizada a solução de uma equação aproxima-se cada vez mais do valor real. O fato de estabelecer uma precisão no início do processo deve-se à necessidade de encerrá-lo,

1 Burden e Faires (2015) adaptado.

uma vez que a iteração gera uma sequência de cálculos e valores que podem ser infinitos e cada vez mais precisos.

É muito comum a utilização de softwares numéricos para determinar uma aproximação para estas soluções, tais como, o *Matlab* e nas suas versões livre *Scilab* e *Octave*. Ambos trazem a possibilidade de usar um encadeamento de comandos repetitivos ou de construção de um algoritmo para, através da iteração, obter uma boa aproximação da solução. Além disso, podemos utilizar os editores de planilhas eletrônicas, tais como o *Excel* ou *Calc*, para construir tabelas que contenham os cálculos determinados pelos métodos supracitados, que apesar de tornar o processo rudimentar, em comparação com os programas anteriores, possibilita o aluno entender os mecanismos envolvidos em cada processo.

Embora já tenhamos disponíveis estes recursos, que funcionam muito bem, os alunos dos cursos de Licenciatura em Matemática provavelmente terão maior contato com algum software educacional como, por exemplo, o GeoGebra que é amplamente divulgado no Brasil e muito abordado em pesquisas (livros, artigos, dissertações, teses, vídeos). Algumas publicações, tais como, Bezerra e Ramos (2020); Junior e Abbeg (2016); Boruch e Scaldelai (2016); Guimarães e Miranda (2010), para citar algumas, demonstram a abordagem do GeoGebra para estudo dos métodos numéricos.

O referido software é gratuito e foi desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarter, tem como premissa articular em um mesmo ambiente, através de suas várias janelas, as representações simbólicas, gráficas e geométricas de um objeto. Dessa forma, o usuário pode interagir e observar as transformações na tela percebendo relações matemáticas existentes.

O GeoGebra é comumente utilizado para se discutir ou construir representações de funções ou de objetos geométricos (2D ou 3D) criando objetos dinâmicos e interativos, mas será que é possível usá-lo no processo de ensino e aprendizagem dos métodos numéricos discutidos anteriormente?

O objetivo desta pesquisa é apresentar algumas possibilidades para tal uso e divulgar uma ferramenta construída por um dos autores. Além disso, gostaríamos de sensibilizar os profissionais que atuam nos cursos de formação de professores a considerarem utilizar o GeoGebra em detrimento de outros softwares.

JANELA DE VISUALIZAÇÃO E COMANDOS

O GeoGebra não possui comandos específicos para determinar as raízes de uma equação utilizando especificamente os métodos mencionados anteriormente. Entretanto, há alguns recursos que podem ser utilizados e que trazem uma ótima precisão para o estudo das raízes destas equações.

Primeiramente, pontuamos que a possibilidade de observar o comportamento gráfico

das funções associadas às equações é possível de ser realizado no programa. Assim, será possível estabelecer um intervalo inicial que atenda ao Teorema de Bolzano[2], ou um valor próximo a raiz para usar nos processos iterativos.

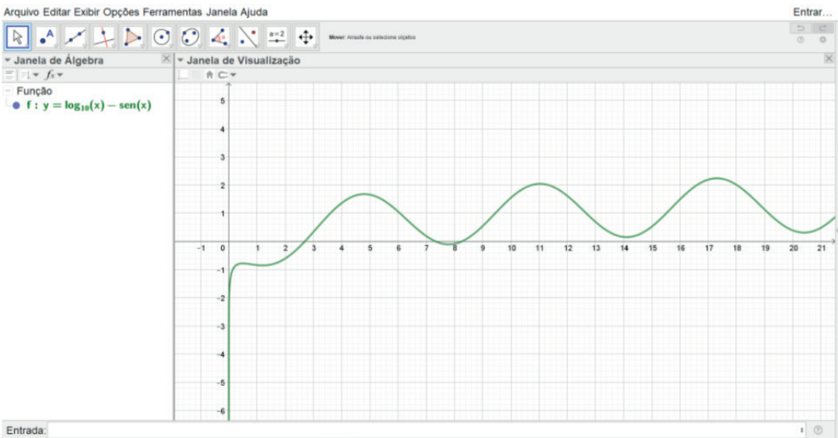


Figura 1:Representação gráfica da função $f(x) = log(x) - sen(x)$ no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Geralmente para determinar tais raízes pelo Teorema de Bolzano os acadêmicos são instruídos a construir uma tabela contendo valores e determinar as suas imagens. Assim, ao verificar a mudança de sinal dentro de um intervalo eles constatam que há ao menos uma raiz naquela região[3]. Entretanto, para uma situação como a apresentada na Figura 1, o aluno poderia observar o comportamento do gráfico para valores extremamente grandes e constatar a sua periodicidade, além de verificar que há apenas estas três raízes para a equação $\log(x) = \text{sen}(x)$.

Além disso, o acadêmico pode utilizar o programa para verificar se os seus resultados determinados durante a aplicação dos métodos iterativos estão condizentes com o auxílio do GeoGebra. Basta utilizar o comando $Raiz(< Função >, < Valor\ de\ x\ Inicial >, < Valor\ de\ x\ Final >)$ que pode ser digitado diretamente na Barra de Entrada.

A Figura 2 a seguir apresenta as aproximações para as três raízes da função a partir da utilização do comando anterior:

2 Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $y = f(x)$, é uma função contínua tal que $f(a).f(b) < 0$, então existe $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

3 Para garantir que a raiz é única no intervalo dado utilizar a seguinte proposição: Se $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, $f(a).f(b) < 0$ e $f'(x) > 0$ (ou $=f'(x) < 0$) para todo $x \in (a, b)$, então existe um único $x^* \in (a, b)$ tal que $f(x^*) = 0$.

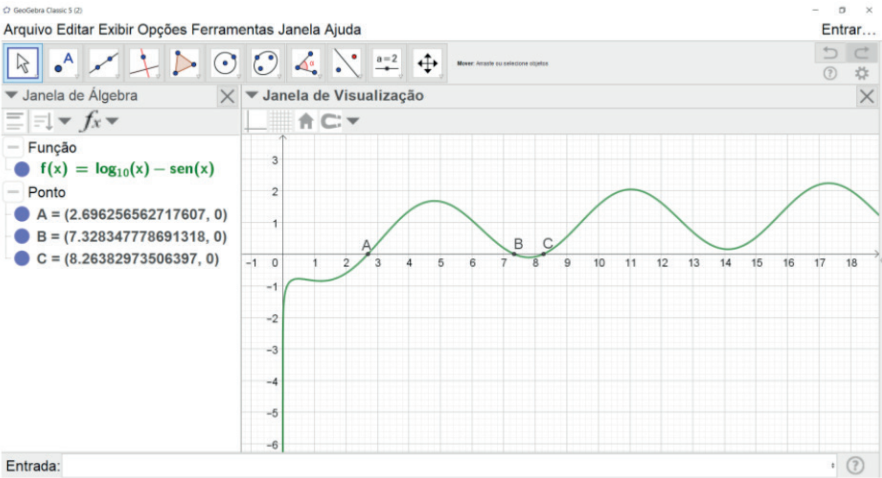


Figura 2: Raízes da função obtida com o GeoGebra.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Este comando apresenta uma melhor aproximação para as raízes e apresentará algumas diferenças em suas últimas casas decimais de acordo com o intervalo adotado. Poderíamos ainda usar a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, localizado na Barra de Ferramentas, mas com a sua utilização a raiz não é determinada com uma precisão igual ao que foi realizado no método anterior. Observe a diferença entre as coordenadas dos pontos A e D na Figura 3 a seguir que representam a mesma raiz:

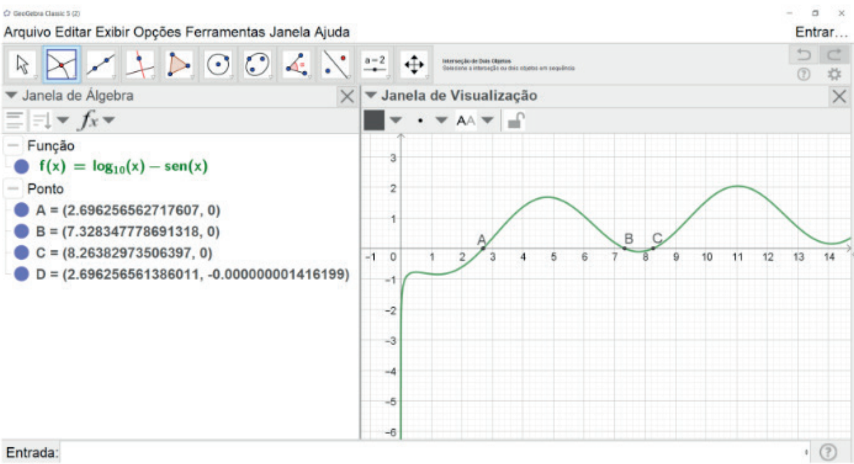


Figura 3: Raízes da função obtida por métodos diferentes.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

PLANILHAS DINÂMICAS

As diversas janelas e funcionalidades do GeoGebra não se esgotam apenas na construção de figuras geométricas planas ou espaciais, ou de funções. O programa ainda possui a opção de trabalhar com planilhas eletrônicas que pode dinamizar o trabalho de determinar as raízes de uma equação, assim como nos editores de planilhas disponíveis no mercado como, por exemplo, Excel, Calc, dentre outros.

Entretanto, a integração da planilha com os outros recursos disponíveis no GeoGebra torna-a uma ferramenta poderosa em detrimento a estes outros editores. Por exemplo, utilizaremos ainda a equação $\log(x) = \sin(x)$ dos exemplos anteriores para ilustrar esta aplicação. Além disso, usaremos o método de Bisseção para determinar o valor das raízes desta equação.

O método de Bisseção consiste em determinar a raiz de uma função contínua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ com $f(a).f(b) < 0$ (existência garantida pelo Teorema de Bolzano). Para determinar a primeira aproximação tomamos o ponto médio do intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$x^{(0)} = \frac{(a+b)}{2}$$

Pode ocorrer que $f(x^{(0)}) = 0$, desta forma, o zero de $f(x)$ é $x^{(0)}$, mas caso não seja devemos continuar o processo refinando cada vez mais esse intervalolevando em consideração o Teorema de Bolzano a cada nova iteração, ou seja, devemos garantir que cada novo intervalo deve atender $f(a).f(b) < 0$.

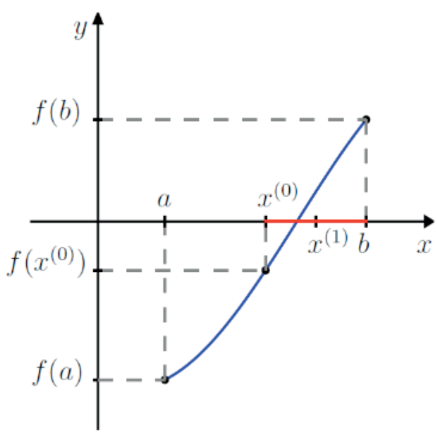


Figura 4:Funcionamento do Método de Bisseção

Fonte:Justo et. al. (2019)

Com base na Figura 4, observamos que para o próximo intervalo usaremos $[x^{(0)}, b]$, pois $f(a).f(x^{(0)}) > 0$. Assim, como $f(x^{(0)}).f(b) < 0$, fazemos

$$x^{(1)} = \frac{x^{(0)} + b}{2}$$

Dessa forma, realizamos estes cálculos até atingirmos uma precisão dada que torne o valor de $x^{(n)}$ o mais próximo possível da solução real. O critério de parada pode ser escolhido dentro de várias possibilidades, chamando de ε o valor dado para a precisão, segundo Burden e Faires (2008) e Justo et. al. (2019), utilizaremos os dois critérios descritos a seguir:

$$f(x^{(n)}) < \varepsilon$$

$$\frac{|b^{(n)} - a^{(n)}|}{2} < \varepsilon$$

Observe que o método consiste em trocar a cada nova iteração os extremos do intervalo que contém a raiz, mas como descrito anteriormente, faremos de tal modo a garantir a aplicação do Teorema de Bolzano. Iniciaremos o processo utilizando tomando $n = 0$ e:

$$a^{(n)} = a \qquad b^{(n)} = b \qquad e \qquad x^{(n)} = \frac{a^{(n)} + b^{(n)}}{2}$$

Verificamos se nesta etapa $x^{(n)}$ ou $a^{(n)}$ e $b^{(n)}$ atende ao critério de parada, em caso positivo, $x^{(n)}$ é a aproximação desejada. Caso contrário, continuaremos o processo, ou seja, passamos a próxima etapa, $n + 1$. Para estabelecer os novos intervalos de iteração façamos o teste: se $f(a).f(x^{(n)}) < 0$, então definimos $a^{(n+1)} = a^{(n)}$ e $b^{(n+1)} = x^{(n)}$; caso contrário, se $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, então definimos $a^{(n+1)} = x^{(n)}$ e $b^{(n+1)} = b^{(n)}$. Observe que nestas mudanças estamos sempre levando em consideração a aplicação do Teorema de Bolzano, ou seja, de garantir que a raiz da função esteja dentro do intervalo considerado na iteração. Assim, na próxima iteração, $n + 1$, basta fazer:

$$x^{(n+1)} = \frac{a^{(n+1)} + b^{(n+1)}}{2}$$

Tornamos a verificamos se nesta etapa $x^{(n+1)}$ ou $a^{(n+1)}$ e $b^{(n+1)}$ atende ao critério de parada, em caso positivo, $x^{(n+1)}$ é a aproximação desejada. Caso contrário, continuamos o processo fazendo as alterações indicadas anteriormente.

Feito estas considerações, passamos a construção do método no GeoGebra. Primeiramente, defina dois controles deslizantes chamando-os de a e b, com intervalo

variando de 0 a 10 e incremento igual a 0,1. Construa os pontos $A = (a, 0)$ e $b = (b, 0)$ para que sejam exibidos na Janela de Visualização o intervalo inicial da iteração.

Na Planilha, construir o cabeçalho tal como exibido na Figura 5 a seguir:

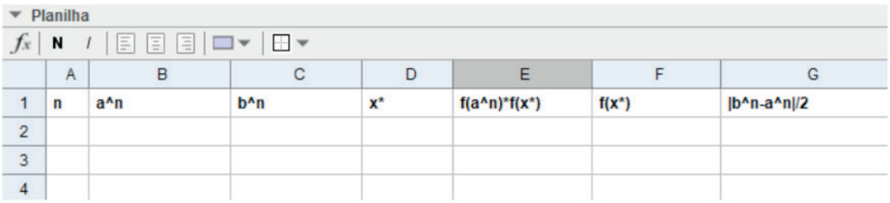


Figura 5:Cabeçalho da Planilha para o método de Bisseção.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Para construir a lista de números que representa a ordem da iteração podemos proceder da mesma forma como nos outros editores de planilha. Iniciamos com a contagem 0 e 1 e, em seguida, utilizamos a alça de preenchimento automático:

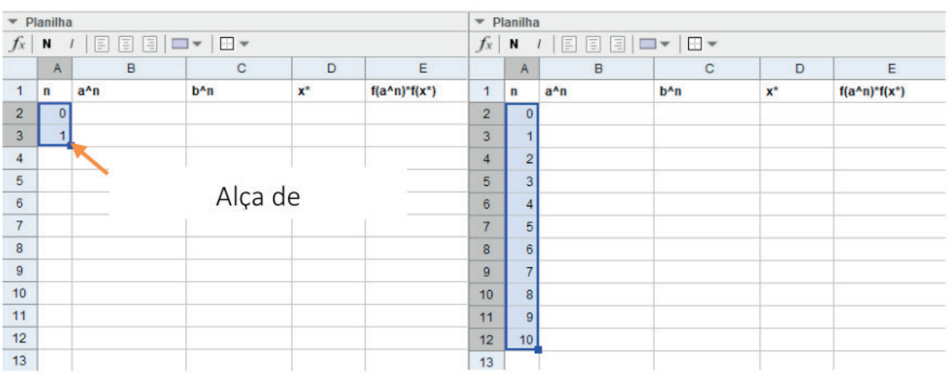


Figura 6:Criando uma lista automática de valores para n

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Para o primeiro valor de $a^{(n)}$ configuraremos na célula $B2$ o seguinte código: = a. E para primeiro valor de $b^{(n)}$ configuraremos na célula $C2$ o código: = b. Estes comandos capturarão os valores dos controles deslizantes criados anteriormente, dessa forma, ao modificá-los a planilha irá atualizar seus valores automaticamente.

O próximo passo é o cálculo de $x^{(n)}$. Assim, na célula D2 , configure o código: = ($B2$ + C2) /2 . Na próxima coluna, realizamos o cálculo de $f(a) \cdot f(x^{(n)})$ que determinará a troca dos extremos dos intervalos de iteração, dessa forma, configure o código: = $f(B2) * f(D2)$.

Por fim, as fórmulas dos critérios de parada. Na célula $F2$, utilizar o comando: $= f(D2)$, que retorna a imagem de $x^{(n)}$ para a função $f^{(x)}$ construída. E na célula $G2$ usar o código: $= (C2 - B2)/2$, que determinará a distância média do intervalo $[a,b]$ em cada iteração dada.

Para determinar os valores das próximas iterações utilizaremos mais dois comandos. Na célula $B3$ usar o código: $= Se(E2 > 0, D2, B2)$. Este comando analisa se o produto $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, em caso positivo, estabelece para $a^{(n=1)}$ o valor de $x^{(n)}$ contido na célula $D2$ e, em caso contrário, repete o valor de a anterior.

Na célula C3 usaremos o código: $= Se(E2 > 0, C2, D2)$. Assim como no caso anterior, esse comando analisa se o produto $f(a).f(x^{(n)}) > 0$, em caso positivo, estabelece para $b^{(n+1)}$ o valor de b obtido anteriormente e, em caso contrário, alteramos o valor de b para o valor de $x^{(n)}$ calculado anteriormente.

Realizado estas etapas, basta copiar as fórmulas para as demais células da tabela através da alça de preenchimento automático. Ao final, teremos o resultado ilustrado na Figura 7 a seguir:

Planilha

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	a^n	b^n	x*	f(a^n)*f(x*)	f(x*)	|b^n-a^n|/2
2	0	2	3	2.5	0.121977166884544	-0.200532135431919	0.5
3	1	2.5	3	2.75	-0.011565029511521	0.057671701777931	0.25
4	2	2.5	2.75	2.625	0.014997997109852	-0.074790990868114	0.125
5	3	2.625	2.75	2.6875	0.000695453465338	-0.009298626174971	0.0625
6	4	2.6875	2.75	2.71875	-0.000223305360797	0.024014876670501	0.03125
7	5	2.6875	2.71875	2.703125	-0.00006800602856	0.007313556570658	0.015625
8	6	2.6875	2.703125	2.6953125	0.000009334724629	-0.001003882127718	0.0078125
9	7	2.6953125	2.703125	2.69921875	-0.000003164262533	0.003152025965399	0.00390625
10	8	2.6953125	2.69921875	2.697265625	-0.000001077532847	0.001073365903544	0.001953125
11	9	2.6953125	2.697265625	2.6962890625	-0.00000003469917	0.000034564984309	0.0009765625
12	10	2.6953125	2.6962890625	2.69580078125	0.000000486584526	-0.000484702847554	0.00048828125

Figura 7:Método de Bisseção para a função $f(x) = log(x) - sin(x)$ para a=2 e b=3.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Se considerarmos $\varepsilon = 10^{-2}$, observando a tabela e adotando o critério $|f(x^{(n)})| < \varepsilon$, temos que o resultado será obtido na iteração de ordem $n = 5$ e assim, $x^{(6)} = 2{,}6953125$. Por outro lado, considerando o segundo critério de parada, teremos que a solução será obtida para $n = 6$ e assim, $x^{(6)} = 2{,}6953125$ é uma aproximação para a raiz da função.

Entretanto, de acordo com a Figura 2=, obtivemos como solução para a primeira raiz da equação o valor $x = 2{,}696256562717607$. Dessa forma, comparando com os valores mencionados anteriormente, $x^{(6)}$ representa uma melhor aproximação para a raiz da função.

Podemos ainda apresentar uma tabela com os valores calculados anteriormente na Janela de Visualização e ocultar a Planilha para tornar melhor a visualização das informações. Para isto, basta selecionar todas as linhas da Planilha que contenham os dados e selecionar a opção *Tabela*, conforme a Figura 8, em seguida, selecionar a opção *Objetos Independentes* e confirmar em *Criar*.



Figura 8:Construindo a tabela vinculada a planilha no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Após as configurações obtemos o resultado representado na Figura 9 a seguir:

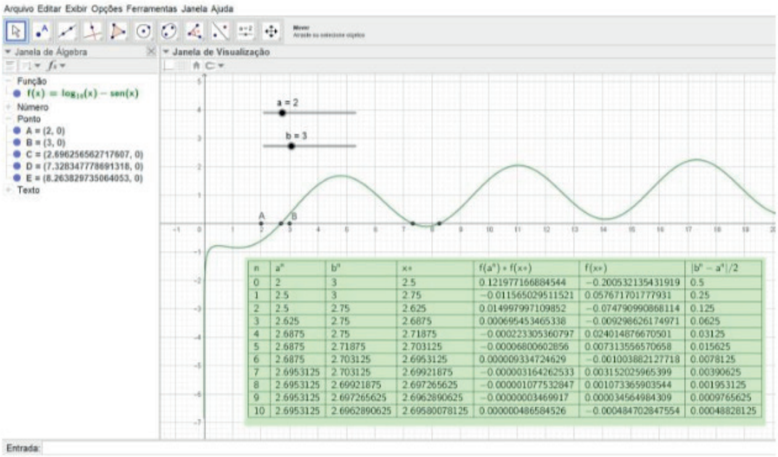


Figura 9:Método de Bisseção implementado no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Com esta construção o usuário pode determinar as outras raízes manipulando apenas os controles deslizantes, determinado novos intervalos que as contenham. Além disso, caso o usuário altere a lei da função, todos os demais campos construídos na planilha e sua representação na Janela de Visualização serão alterados automaticamente.

Esta é uma das vantagens de utilizar o GeoGebra em detrimento a outros editores de planilha, pois nestes a cada mudança na lei da função o usuário deve atualizar quase todas as fórmulas manualmente. A possibilidade de visualizar numa mesma tela todos estes resultados é outra possibilidade que se torna interessante para o usuário, pois assim a sua atenção está focada em um único programa.

RAÍZES DE EQUAÇÕES: UMA FERRAMENTA DISPONÍVEL

Apresentamos neste trabalho uma ferramenta construída no GeoGebra com o intuito de auxiliar na discussão dos métodos iterativos para determinação das raízes de equações por meio dos métodos de Bisseção, Ponto Fixo, Newton e Secantes. Esta ferramenta está disponível no endereço eletrônico: https://danmartins.com.br/recursos-educacionais.

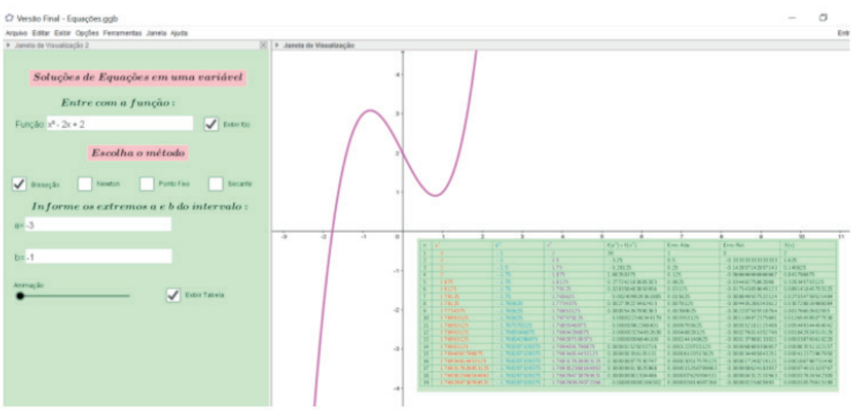


Figura 10:Versão final do aplicativo construído no GeoGebra.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Esta ferramenta conjuga duas janelas para apresentar resultados e análise dos métodos supracitados. Na primeira janela o usuário insere elementos necessários tais como a função associada a equação e os valores iniciais para o processo de iteração em cada método. Ainda é possível, por meio das caixas de seleção, escolher qual método será utilizado para resolver o problema e assim observar qual método converge mais rápido.[4]

4 De modo geral o método de Newton é o que possui uma convergência mais rápida (convergência quadrática). O método de Bisseção e Ponto Fixo possuem convergência linear e o método da Secante dada por $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$.

Além disso, com a utilização do controle deslizante que possui o nome de “Animação”, disponível em todos os métodos, o usuário pode observar o comportamento das aproximações obtidas em cada iteração. Essa visualização pode tornar-se importante durante o estudo dos métodos, entendendo assim a suas motivações geométricas.

Na Figura 11, por exemplo, apresentamos dois resultados diferentes obtidos ao usar o método de Ponto Fixo para determinar a raiz da função $f(x) = x^3 - 2x + 2$, juntamente com a animação construída com o controle deslizante:

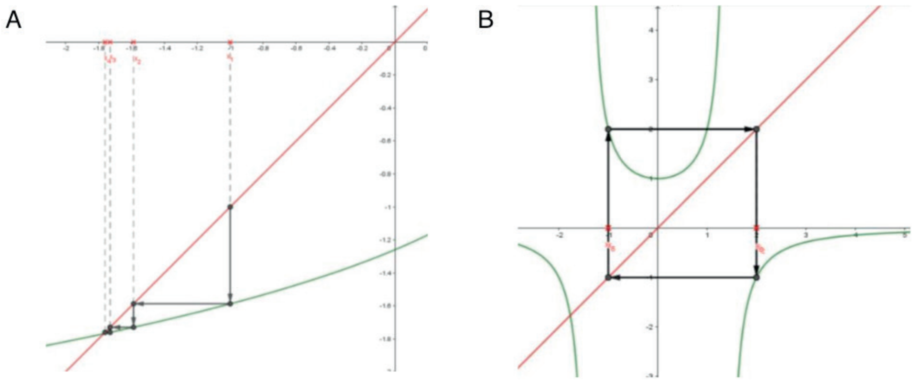


Figura 11:A –Solução convergente através do Método de Ponto Fixo. Função de iteração utilizada: $g(x) = \sqrt[3]{2x-2}$ e $x^{(1)} = -1$. **B –** Solução divergente através do Método de Ponto Fixo. Função de iteração utilizada: $g(x) = -\frac{2}{x^2-2}$ e $x^{(1)} = -1$.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Dessa forma, a animação pode auxiliar os usuários a observar a convergência do método ao escolher uma função de iteração $g(x)$. Inclusive permite o usuário analisar para diferentes valores iniciais da iteração se a função $g(x)$ adotada convergirá ou não para a solução do problema, como no caso da Figura 11B em que a função de iteração não converge para a solução independentemente do valor inicial utilizado. Entretanto, cabe a ele observar e deduzir algebricamente o porquê do método não converge para a solução ao adotar tal função[5]. Dessa forma, o aplicativo auxilia na determinação destas funções de iteração convergentes ou divergentes, por meio da inspeção visual. Ainda sobre as funções de iteração convergentes pode-se observar aquela que possivelmente apresentará uma convergência mais rápida ao analisar os valores tabelados.

Estudar estes métodos é um constante retorno ao estudo das teorias do Cálculo Diferencial. Por exemplo, ao estudar o método de Newton que emprega a utilização da derivada da função no processo iterativo, podemos recriar a situação apresentada na Figura 12:

5 Vide Teorema da Convergência de funções de iteração em Ruggiero e Lopes (1996, p. 58-59)

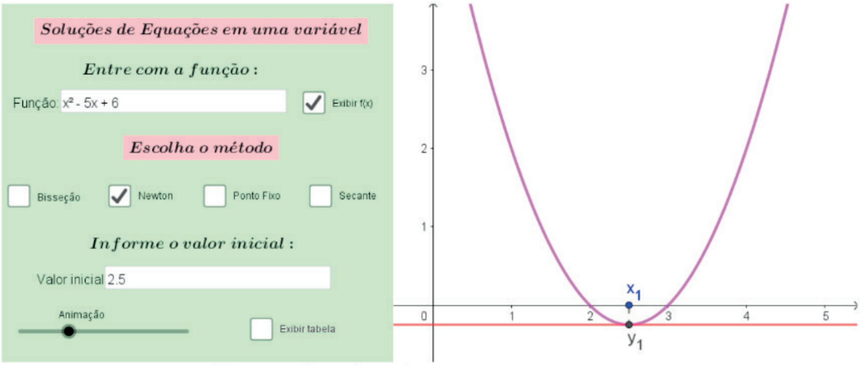


Figura 12:Utilizando o Método de Newton para discutir conceitos de Cálculo Diferencial.

Fonte:Arquivo do autor, 2020.

Quando o usuário tiver compreendido a motivação geométrica do método de Newton poderá fazer as devidas conexões com os conceitos discutidos nas aulas de Cálculo Diferencial.

Podemos ainda exemplificar o problema de determinar as raízes da função $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ e discutir com os alunos a razão de não ser possível usar o método de Bisseção, uma vez que não é garantido as condições do Teorema de Bolzano. Como se observa na Figura 13 a seguir, a animação construída com as aproximações determinadas pelo método evidencia que não conseguimos construir uma sequência convergente para determinar a raiz da equação.

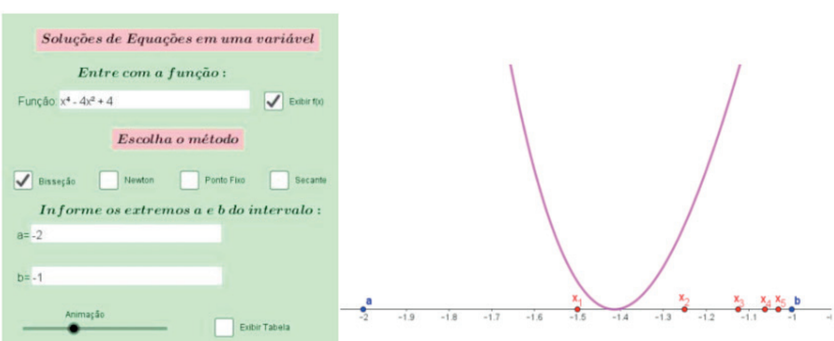


Figura 13: Método de Bisseção aplicado em intervalo da função que não atende o Teorema de Bolzano.

Fonte: Arquivo do autor, 2020.

Entretanto, ao utilizar os outros métodos que não exigem as especificidades impostas pelo Teorema de Bolzano, o aluno conseguirá determinar a solução do problema. Assim, confrontando as teorias estudadas e os modelos visuais construídos, com o auxílio do aplicativo, podemos auxiliar a aprendizagem dos nossos alunos.

Para finalizar, salientamos que os valores determinados e apresentados nas tabelas neste aplicativo estão idênticos aos que foram determinados por meio de algoritmos utilizando o *software* livre *Scilab*. Portanto, embora o aplicativo tenha a limitação no número de iterações estas estão em concordância com os resultados obtidos em programas numéricos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O questionamento que levou a realização deste trabalho esteve vinculado a: por que utilizar o GeoGebra no estudo dos métodos numéricos para determinação de raízes de equações? Ao final, esperamos ter contribuído para que os interessados sobre o assunto tenham percebido estas possibilidades.

Defendemos o uso do GeoGebra nestas situações devido aos benefícios apresentados anteriormente e a outros que destacaremos aqui. Primeiramente, o uso do GeoGebra torna fácil e automático o estudo de outras funções, pois ao alterá-la e os valores iniciais utilizados em cada método, os cálculos construídos na planilha são automaticamente modificados, diferente do que acontece nos outros editores de planilhas que necessitam alterar as fórmulas a cada momento de teste.

Segundo, da mesma forma que os alunos constroem as tabelas nos editores de planilha, eles poderão também fazer no GeoGebra e assim entender o procedimento empregado para não tornar o ensino destes conteúdos tão mecânicos, com o simples apertar de botões. Embora tenhamos apresentado no início um comando que determina uma aproximação para as raízes deve-se entender que tal procedimento não substitui a construção das planilhas, é apenas um recurso que pode apoiar a aprendizagem do aluno durante os seus estudos.

Além disso, alguns cursos de Licenciatura em Matemática não preveem na sua grade curricular disciplinas de linguagem de programação de computadores. Portanto, para estes casos torna-se um desafio ao professor ensinar o método e ainda uma linguagem de programação para construir algoritmos que realize estes cálculos numéricos. Dessa forma, o GeoGebra torna-se um aliado por tornar essa aprendizagem mais fácil para os alunos e para o trabalho do professor. Embora tal fato não seja limitador para esta discussão, talvez seja interessante uma abordagem mista.

Outro fator a ser considerado é a popularidade que o GeoGebra possui nos cursos de Licenciatura em Matemática. É bem provável que a maioria, se não todos, os alunos destes cursos já tiveram contato em algum momento com o software, seja para estudo

pessoal ou para construção de material didático.

Consideramos que o GeoGebra possui as suas limitações, como indicado em Bortolossi, Pesco e Rezende (2012). Entretanto, será útil usá-lo pelos recursos visuais e dinamicidade, inclusive para observar as motivações geométricas em cada método, conforme ilustramos na ferramenta construída e disponibilizada.

Assim, esperamos que este trabalho sirva para motivar interessados sobre o assunto a pesquisarem mais sobre estas possibilidades, assim como, ampliar as discussões que aqui apresentamos.

REFERÊNCIAS

BEZERRA, F. D. M; RAMOS, M. W. A. **Métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem por meio de um applet do GeoGebra.** PMO, v.8, n.1, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.21711/2319023x2020/pmo82

BORTOLOSSI, H. J.; PESCO, D. U.; REZENDE, W. M. **Computação simbólica com o software gratuito GeoGebra.** Anais. Conferência Latinoamericana de GeoGebra. Uruguai, 2012. p. 29-34. Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/22.pdf

BORUCH, I. G. S; SCALDELAI, D. **Método de Newton para resolução de sistemas não lineares: uma abordagem gráfica no software GeoGebra.** Anais do II Colbeduca. Joinville, SC. p. 485 – 497. Disponível em: http://www.revistas.udesc.br/index.php/colbeduca/article/view/8144/6115

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2015.

GUIMARÃES, Y. P. B. Q.; MIRANDA, D. F. **Estudo de métodos numéricos para resolução de integrais com o uso dos softwares VCN e GeoGebra.** Anais. X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, BA. Disponível em: http://docplayer.com.br/148782414-Estudo-de-metodos-numericos-para-resolucao-de-integrais-com-o-uso-dos-softwares-vcn-e-geogebra.html

JUNIOR, R. R. O; ABBEG, T. P. **História, resolução numérica e GeoGebra o ensino de equações algébricas.** PMO, n.1, v.4, 2016. Disponível em: http://pmo.sbm.org.br/wp-content/uploads/sites/16/2016/02/pmo-sbm-v004-n001-ortega-junior-e-abbeg.pdf

JUSTO, D. A. R.; SAUTER, E.; AZEVEDO, F. S.; GUIDI, L. F.; KONZEN, P. H. A. **Cálculo Numérico: um livro colaborativo – Versão Scilab.** 2019. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2ª ed. São Paulo. Makron Books, 1996.

CAPÍTULO 6

DISCALCULIA EM FOCO: ESTUDO DE CASO COM UM ESTUDANTE DO 7° ANO

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 26/01/2021

Emilim Caroline Canabarro
Faculdades Integradas de Taquara – FACCAT
Três Coroas – RS
http://lattes.cnpq.br/7931102241225300

Lucieli Martins Gonçalves Descovi
Faculdades Integradas de Taquara – FACCAT
Taquara - RS
http://lattes.cnpq.br/0273501141730107

RESUMO: Este artigo é um recorte do trabalho de conclusão de curso de Matemática/FACCAT, apresentado no ano de 2019. Foi realizada uma investigação dos aspectos relacionados ao acompanhamento, ao tratamento e à inclusão no ambiente escolar regular de um aluno com o transtorno de aprendizagem Discalculia da rede municipal, de um município do Vale do Paranhana. Foram realizadas entrevistas com as psicopedagogas da APAE[1] e da instituição de ensino que atenderam o aluno, com a professora de Matemática e com o aluno discalcúlico investigado. Após a realização das entrevistas, foi possível obter informações sobre o processo de identificação do transtorno, seu tratamento e as orientações para a professora de Matemática atendê-lo em seu planejamento. Em seguida, foi realizado um conjunto de atividades com o aluno discalcúlico, acompanhadas pela psicopedagoga da escola, utilizadas como ferramentas de intervenção pedagógica com o intuito de identificar traços característicos da discalculia. O estudo está fundamentado em Bernardi (2014), Rotta (2016), Riesgo (2016), Ohlweiler (2016) e Bridi Filho (2016). A partir dos levantamentos realizados, foi possível constatar que os professores têm dificuldade de reconhecer esse transtorno em sala de aula, devido à falta de informações e conhecimentos. É preciso manter o diálogo entre os especialistas que atendem o aluno e os professores da escola regular para uma maior eficiência no ensino e na aprendizagem da matemática. Durante as atividades, foi possível perceber as características do transtorno de aprendizagem da discalculia apresentadas pelo aluno investigado. Portanto, o estudo ressalta a importância de os professores conhecerem as dificuldades dos alunos para que tenham condições de desenvolver um planejamento de condução de ensino, sobretudo para os alunos discalcúlicos com dificuldades de aprendizagem.
PALAVRAS - CHAVE: Transtorno. Discalculia. Aprendizagem. Sala de recurso.

DYSCALCULIA IN FOCUS: CASE STUDY WITH A 7TH GRADE STUDENT

ABSTRACT: This article is an excerpt from the Mathematics / FACCAT course final paper, presented in 2019. An investigation of aspects related to monitoring, treatment and inclusion in a regular school environment of a student with the learning Discalculia from the public network, in Paranhana Valley. Interviews were conducted

1 APAE: Associação de Pais e Amigos dos Excepcionais do Brasil, é uma organização social, cujo objetivo é promover a atenção integral à pessoa com deficiência.

with the psychopedagogists from APAE[2] and the educational institution that assisted the student, with the mathematics teacher and with the investigated student. After conducting the interviews, it was possible to obtain information about the process of identifying the disorder, its treatment and the guidelines for the mathematics teacher to assist him in his planning. Then, a set of activities was carried out with him, accompanied by the school psychopedagogue, used as tools for pedagogical intervention in order to identify characteristic features of dyscalculia. The study is based on Bernardi (2014), Rotta (2016), Riesgo (2016), Ohlweiler (2016) and Bridi Filho (2016). From the surveys carried out, it was found that teachers have difficulty recognizing this disorder in the classroom, due to the lack of information and knowledge. It is necessary to maintain the dialogue between the specialists who work with the student and the teachers of the regular school for a greater efficiency in the teaching and mathematics learning. During the activities, it was possible to perceive the characteristics of the dyscalculia learning disorder presented by the investigated student. Therefore, the study emphasizes the importance of teachers knowing the students' difficulties so that they are able to develop a plan for conducting teaching, especially for students with learning difficulties.
KEYWORDS: Disorder. Dyscalculia. Learning. Resource room.

1 | INTRODUÇÃO

O tema abordado nesta pesquisa é a Discalculia, versando sobre as estratégias utilizadas para o ensino e aprendizagem da Matemática, com um aluno diagnosticado com discalculia, em uma escola pública, em um município do Vale do Paranhana.

Como esta pesquisa teve o propósito de compreender a aprendizagem matemática de alunos com discalculia, pode-se questionar o seguinte: como se dá o processo de identificação, o encaminhamento para diagnóstico, o tratamento do transtorno, a elaboração de metodologias e práticas pedagógicas e os meios de inclusão do aluno com discalculia no ambiente escolar, em um município do Vale do Paranhana?

Os estudantes possuem habilidades diferentes uns dos outros. Porém, há alguns discentes que não conseguem desenvolver algumas habilidades cognitivas e apresentam dificuldades no seu processo de aprendizagem. Essas dificuldades de aprendizagem preocupam professores, equipe diretiva e os pais, levantando questionamentos de como trabalhar com cada dificuldade apresentada na sala de aula.

E, dentre as dificuldades de aprendizagem em Matemática, existe a discalculia, que é associada à aquisição do conhecimento relacionado aos números e aos cálculos. "A presença da quantificação e da linguagem da matemática está presente no cotidiano de qualquer ser humano" e a "matemática certamente ajudou a construir o nosso formato neurológico atual, por meio da exigência de memorização, catalogação ou abstração de elementos numéricos e suas relações possíveis" (BRIDI FILHO, 2016, p.257).

Dessa forma, calcular é uma função complexa, envolvendo vários mecanismos cognitivos, como processamento verbal e/ou gráfico da informação, percepção,

2 APAE: Association of Parents and Friends of the Exceptional of Brazil is a social organization, whose objective is to promote comprehensive care for people with disabilities.

reconhecimento e produção de números, representação número/símbolo, discriminação visuo-espacial, memória de curto e longo prazo, memória de trabalho, raciocínio sintáxico e atenção.

Assim, a discalculia só será percebida com observações do professor, e, dependendo do subtipo de discalculia, o aluno não conseguirá estabelecer relação entre os números, montar operações e identificá-las. Para a criança, o professor estará falando um outro idioma, uma língua desconhecida.

É uma dificuldade existente na sala de aula, e o professor, muitas vezes, não a reconhece e/ou não sabe como proceder com o aluno que a apresenta. Diante dessa problemática, surgiu o interesse em compreender a discalculia e as suas causas, além de como pode ser feito o diagnóstico e o trabalho em sala de aula com o aluno identificado discalcúlico.

2 I DIFICULDADES DE APRENDIZAGEM

Segundo Ohlweiler (2016), os problemas relacionados com a aprendizagem têm se tornado mais relevantes na atualidade, em virtude de que o sucesso do indivíduo está relacionado ao seu desempenho escolar.

> Os termos utilizados, tais como “distúrbios”, “dificuldades”, “problemas”, “discapacidades”, “transtornos”, são encontrados na literatura e, muitas vezes, são empregados de forma inadequada. Na tentativa de permitir uma comunicação mais adequada entre os profissionais que atuam na área da aprendizagem, é importante que exista uma termologia uniforme. Dessa forma, é importante estabelecer diferenças (OHLWEILER, grifo do autor, 2016, p.107).

À vista disso, será realizada a distinção, de maneira sucinta, das terminologias “distúrbio”, “transtorno” e “dificuldades” da aprendizagem.

Distúrbio da aprendizagem	Transtorno da aprendizagem	Dificuldades da aprendizagem
-É uma disfunção na região parietal (lateral) do cérebro; -É uma disfunção neurológica no processo natural da aquisição da aprendizagem; -Déficits nas habilidades de linguagem e matemática; -Apresenta dificuldades de aquisição e desenvolvimento da aprendizagem, apesar das boas oportunidades escolares; - Inteligência na média ou superior.	-É uma disfunção na região frontal do cérebro; -Se caracteriza por dificuldades persistentes e prejudiciais nas habilidades básicas da linguagem (leitura, escrita) e/ ou na matemática; - Pode ocorrer comprometimentos comportamentais como impulsividade, hiperatividade entre outros; - Habilidades bem abaixo da média para a idade.	-Ocorre devido a uma disfunção do Sistema Nervoso Central, podendo ocorrer por toda a vida; -Podem aparecer por diferentes motivos como despreparo do professor, as práticas pedagógicas, déficits cognitivos ou problemas familiares; -Se caracteriza por um funcionamento substancialmente abaixo do esperado.

Quadro 1 - Resumo das terminologias distúrbio, transtorno e dificuldade de aprendizagem

Fonte: Pesquisadora (2019)

Logo, o professor deve respeitar o ritmo de aprendizagem de seus alunos, suas histórias e suas características. Como, também, deve buscar informações e conhecimentos para o aperfeiçoamento em sua prática na sala de aula, atingindo de forma positiva na aprendizagem de seus alunos.

3 | DISCALCULIA

De acordo com Bernardi (2014), é preciso algumas definições para os dois transtornos específicos da matemática – acalculia e discalculia – para compreender a diferença entre eles. Para Bastos (2016), a acalculia é causada por lesões e é a redução da aptidão em executar cálculos e desenvolver o raciocínio aritmético, sendo classificada em três subtipos:

> [...] - acalculia afásicas – ligada a lesões que afetam mais o hemisfério esquerdo, especificamente o lobo parietal, observadas em casos de alexias e de agrafias numerais. Como, por exemplo, ao resolver um cálculo de multiplicação por dois algarismos, um paciente agráfico para números pode preservar a disposição espacial de estrutura multiplicativa, mas utilizar bolinhas para escrever os números; - acalculias espaciais – associadas a lesões, especialmente parieto-occipitais do hemisfério direito, mas também lesões bi-hemisféricas, isto é, o paciente acalcúlico conserva o princípio do

> cálculo, comprovado em cálculos mentais, mas altera a disposição espacial dos números escritos; - anaritmetia – que corresponde às acalculias primárias, associadas a lesões do hemisfério esquerdo parieto-temporais e parieto-occipitais que afetam a execução das operações aritméticas (BERNARDI, 2014, p. 16).

A autora esclarece que a acalculia é causada por lesões cerebrais, que afetam a capacidade de operar com os números e símbolos matemáticos, podendo ser classificada em três subtipos: acalculia afásica, em que o indivíduo conserva a operação, mas utiliza estratégias diferentes para escrever os números; acalculia espacial, em que o indivíduo opera, porém, altera os números na posição espacial e a anaritmetia, na qual afeta a realização dos cálculos. Já a discalculia não é provocada por lesões no cérebro, mas está relacionada a indivíduos que manifestam dificuldades no processo de aprendizagem das habilidades matemáticas (BERNARDI, 2014).

Silva (2014), expõe que a discalculia se caracteriza como um transtorno silencioso e que se mistura a outros aspectos do processo de desenvolvimento e aprendizagem do aluno, tornando visível as dificuldades quando o mesmo já possui sucessivas situações de fracassos.

Kellermann (2008, p. 47) caracteriza a discalculia como uma dificuldade em efetuar cálculos matemáticos, afetando a competência em compreender, reter e utilizar os símbolos numéricos. Já Vieira (2004) expõe que a discalculia significa uma alteração da capacidade de cálculo em sentido mais amplo e essas alterações podem ser observadas no manejo com números, cálculos mentais, leitura e escrita de números. Considera-se, portanto, que a discalculia é uma

> Alteração específica em aritmética, não atribuível exclusivamente a um retardo mental global ou à escolarização inadequada. O déficit concerne ao domínio das habilidades computacionais básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão, mais do que às habilidades matemáticas abstratas envolvidas em álgebra, trigonometria ou cálculo (BASTOS, 2016, p. 176).

O autor explica que a discalculia é uma alteração específica da matemática e que não é causada por um aprendizado inapropriado, nem de um problema psíquico. Esse transtorno refere-se às habilidades em efetuar as operações mais básicas e utilizar os números.

Para Bridi Filho et al. (2016, p. 258), a discalculia "é uma dificuldade de aprendizagem específica, que se manifesta pela incapacidade de alcançar a proficiência adequada em aritmética, apesar da inteligência normal, oportunidades escolares, estabilidade emocional e motivação suficiente". O autor salienta, que apesar de possuir todas as adequações, adaptações e as vivências na vida escolar e na vida familiar, o aluno não atingirá plenamente as competências matemáticas.

Desta forma, de acordo com Bernardi (2014), a discalculia configura uma desordem estrutural da maturação das competências matemáticas. As manifestações da discalculia

no período escolar são:

> Erro na formação de números (inversões); dislexia; dificuldade para efetuar somas simples; dificuldade para reconhecer sinais das operações; dificuldade para ler corretamente o valor de números com vários dígitos; dificuldade de memória para fatos numéricos comuns/básicos; dificuldade para montar a conta matemática, colocando cada número no seu local adequado; ordenação e espaçamento inapropriado dos números em multiplicações e divisões (BRIDI FILHO, 2016, p. 258),

De acordo com o autor, o aluno portador de discalculia pode evidenciar erros comuns, como não operar somas simples, não reconhecer sinais de operações e números, não ordenar e organizar de maneira adequada os números. Por esses motivos, o professor deve estar atendo ao seu aluno, pois

> A discalculia pode afetar a vida escolar e também a vida pessoal da criança porque o dia-a-dia exige uma incorporação de conceitos matemáticos e sua compreensão. Assim, o medo, o desinteresse e a agressividade são alguns fatores que podem fazer parte do comportamento da criança (KELLERMANN, 2008, p. 48).

À vista disso, o aluno pode apresentar comportamentos negativos, tanto em sala de aula, como em casa, porque ele não consegue compreender e utilizar os conceitos matemáticos mais simples para a sua vivência cotidiana, conforme a autora.

Como a acalculia, a discalculia também pode ser dividida em seis tipos, manifestando-se sob várias combinações e associada a outros transtornos (BERNARDI, 2014):

> 1.Discalculia verbal: dificuldades em nomear quantidades matemáticas, os números, os termos e os símbolos; 2.Discalculia practognóstica: dificuldades para enumerar, comparar, manipular objetos reais ou em imagens; 3.Discalculia léxica: dificuldades na leitura de símbolos matemáticos; 4.Discalculia gráfica: dificuldades na escrita de símbolos matemáticos; 5.Discalculia ideognóstica: dificuldades em fazer operações mentais e na compreensão de conceitos matemáticos; e 6.Discalculia operacional: dificuldade na execução de operações e cálculos numéricos (BERNARDI, 2014, p. 19).

De acordo com a autora, a discalculia é classificada em seis subtipos e o aluno pode apresentar apenas uma ou uma combinação dos seis subtipos. As dificuldades apresentadas pela autora vão desde a complexidade de reconhecer, nomear e utilizar os números à dificuldade de abstração para realização dos cálculos matemáticos. Nesse cenário,

> Ao ensinar o conceito de número, o educador necessita estar atento para a discalculia, caracterizada como uma alteração da capacidade de realizar cálculos aritméticos, implicando, de um modo geral, no manejo mental que a criança faz dos números durante o cálculo mental e leitura e escrita dos números (BERNARDI, 2014, 20).

A autora ressalta a importância do professor estar atento ao processo de aprendizagem de seu aluno para observar as alterações das competências matemáticas, reconhecendo a discalculia. Por isso Farrell (2008) reconhece que o professor deve compreender a discalculia e suas características para poder diferenciá-la de uma dificuldade de aprendizagem, identificando assim o transtorno, pois

> O aluno pode experienciar dificuldade em adaptar conhecimentos existentes, não conseguindo aplicar procedimentos não-adaptados à tarefa em questão. Por exemplo, para somar fisicamente diferentes números de itens (como 2, 3, 4) a 6 itens existentes, o aluno conta a partir de 1 todas as vezes, em vez de adaptar a maneira de contar partindo do 6. [...] O ensino estruturado de diferentes estratégias, acompanhado de prática, pode ajudar a adaptar conhecimentos. [...] o aluno pode ser ensinado a aplicar abordagens e habilidades a diferentes situações. O professor, primeiramente, assegura-se de que as habilidades estão estabelecidas e, então, introduz gradualmente as demandas extras para aplicar o conhecimento e habilidade em circunstâncias diferentes. [...] Outro aspecto importante é, sempre que possível, o professor tornar o trabalho relevante e significativo (FARRELL, 2008, p.79).

Portanto, de acordo com o autor, é necessário o professor repensar sua prática na sala de aula de modo a atingir esse aluno portador de discalculia, para que ele possa aprender significativamente os conceitos matemáticos, fazendo uso de diferentes recursos, metodologias, adaptações e estratégias, tendo total acompanhamento e apoio de seu professor, de forma que a aprendizagem seja significativa e importante para este aluno.

Assim, o professor tem oportunidades de avaliar todo o processo de aprendizagem de seu aluno, e é essa avaliação que dará evidências para amparar suas ações sistemáticas, pois é o indivíduo que tem o privilégio de contemplar e verificar o desempenho de seu aluno, segundo Neto (1991). Afinal,

> [...] o fato de ter aprendido a andar eretamente na Pré-história não implica que o homem já nasça sabendo andar. Cada criança deve, sozinha, passar pelas etapas da espécie humana, aprendendo a andar em pé, a falar, a contar, a adquirir noção de conservação e assim por diante. E cada criança faz isso num ritmo próprio (NETO, 1991, p.25).

Logo, é necessário considerar a bagagem de aprendizagem e da cultura de cada aluno, pois cada um tem o seu tempo e ritmo para aprender e compreender os conceitos ensinados, como o autor reconhece. Santaló (1996, p. 11) também salienta que o professor deve proporcionar aos alunos "[...] o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, [...] no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade". Desta forma, como comenta o autor, é preciso repensar as metodologias e práticas pedagógicas em sala de aula, se estão adequadas para o ensino e aprendizagem dos conceitos, e o desenvolvimento das habilidades e competências utilizadas no seu dia a dia e após finalizar sua escolaridade.

Acalculia	Discalculia
É causada por lesões e é a redução da aptidão em executar cálculos e desenvolver o raciocínio aritmético.	Não é causada por lesões. É uma incapacidade de alcançar a proficiência adequada em aritmética e essas alterações podem ser observadas no manejo com números, cálculos mentais, leitura e escrita de números.
É classificada em três subtipos: -Acalculia Afásica: lesões que afetam o hemisfério esquerdo, especificamente o lobo parietal. O indivíduo pode preservar a disposição espacial da operação, mas utilizar desenhos para escrever os números; -Acalculia espacial: lesões que afetam especialmente o parieto-occipital do hemisfério direito e lesões bi-hemisféricas. O indivíduo conserva o cálculo, mas altera a disposição espacial dos números escritos; -Anaritmetia: lesões no hemisfério esquerdo parieto-temporal e parieto-occipital. Afeta a execução das operações aritméticas.	É classificada em seis subtipos, podendo se manifestar com várias combinações entre os diferentes subtipos. -Discalculia Verbal: dificuldades em nomear quantidades matemáticas, os números, os termos e os símbolos; -Discalculia practognóstica: dificuldades para enumerar, comparar, manipular objetos reais ou em imagens; -Discalculia léxica: dificuldades na leitura de símbolos matemáticos; -Discalculia gráfica: dificuldades na escrita de símbolos matemáticos; -Discalculia ideognóstica: dificuldades em fazer operações mentais e na compreensão de conceitos matemáticos; -Discalculia operacional: dificuldade na execução de operações e cálculos numéricos.

Quadro 2 - Resumo dos transtornos de aprendizagem acalculia e discalculia

Fonte: Pesquisadora (2019)

Portanto, torna-se de fundamental importância o professor perceber seu aluno e reconhecer nessa observação os sinais e evidências para a identificação do problema na sala de aula, para, então, realizar o encaminhamento, juntamente com equipe diretiva e os pais, a uma avaliação e diagnóstico corretos, com profissionais especializados da educação e da saúde. Com isso, o professor poderá redimensionar as metodologias e práticas pedagógicas para um aprendizado significativo e relevante para o aluno portador de discalculia, além de todo acompanhamento especializado que o aluno irá dispor.

4 I METODOLOGIA

O presente artigo teve como proposta analisar como é o processo de identificação, o encaminhamento para diagnóstico, o tratamento do transtorno, a elaboração de recursos pedagógicos e os meios de inclusão do aluno com discalculia no ambiente escolar, em um município do Vale do Paranhana.

Contudo, foi fundamental, primeiramente, compreender sobre o transtorno específico da aprendizagem de matemática, a discalculia. Notou-se que há poucos estudos sobre o assunto, pois a pesquisadora teve dificuldades de encontrar autores que discutem a discalculia, suas causas, seu tratamento e suas limitações. No entanto, foi possível aprender, com o pouco disponibilizado, que a discalculia "é uma dificuldade de aprendizagem específica que se manifesta pela incapacidade de alcançar a proficiência adequada em aritmética, apesar da inteligência normal, oportunidades escolares, estabilidade emocional e motivação suficiente", de acordo com Bridi Filho et al. (2016, p. 258), caracterizando-se, assim, "como uma desordem estrutural da maturação das capacidades matemáticas, sem manifestar, no entanto, uma desordem nas demais funções mentais generalizadas" (BERNARDI, 2014, p. 17).

Posteriormente, a pesquisadora realizou entrevistas com as psicopedagogas da APAE e da escola que atendem o aluno, com sua professora de Matemática e com o próprio aluno com discalculia investigado. Após, realizaram-se quatro atividades com o aluno discalcúlico para observação e reconhecimento das características do transtorno abordadas por diferentes autores no presente artigo, com o acompanhamento da psicopedagoga da instituição de ensino.

5 I DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Através das entrevistas, a pesquisadora descobriu detalhes pertinentes sobre o aluno, seu encaminhamento, seu tratamento e seu ensino e aprendizagem, percebendo, durante todo o desenvolvimento da pesquisa, algumas lacunas importantes no processo que poderiam resultar em uma aprendizagem adequada se percebidas com antecedência, como a demora em seu encaminhamento para avaliação com especialistas, a demora do resultado do diagnóstico para a professora, as inequações metodológicas por desconhecimento do real diagnóstico, entre outros.

O aluno foi encaminhado para atendimento especializado para descobrir seu problema somente após permanecer no 3° ano, das séries iniciais, do ensino fundamental, por dois anos. É importante ressaltar a importância de o professor conhecer como se dá o processo de aprendizagem e estar observando o desenvolvimento de seus alunos, se ele está com muita defasagem em sua aprendizagem, especialmente quando manifestam pouca motivação para aprender, para detectar algum problema o mais cedo possível, como abordam os autores Bernardi (2014) e Neto (1991).

Em seguida, o aluno foi atendido por uma equipe multidisciplinar na APAE do município, tendo, no ano de 2016, sua primeira avaliação com o diagnóstico de limítrofe em deficiência intelectual e, dentro desse quadro, então, a discalculia, permanecendo com atendimento psicopedagógico até o presente momento. Porém, chegou à professora, o diagnóstico de discalculia, no ano de 2019, após a pesquisadora entrar em contato para a realização da investigação. A professora não possuía total conhecimento sobre o transtorno de seu aluno. Ela afirmou que sabia que ele possuía algumas dificuldades, mas não sabia que ele era limítrofe em deficiência intelectual e, dentro deste quadro, apresentar o transtorno de discalculia. A professora, então, buscou apoio e informações com a psicopedagoga da escola, que realizou a triagem e o informe sobre o aluno, para compreender o transtorno e como trabalhar com este aluno em sala de aula.

Sem o conhecimento do diagnóstico, a professora não pôde intervir de forma adequada no processo de aprendizagem até a pesquisa se realizar, pois não sabia como trabalhar com este aluno em sala de aula, por falta de conhecimento de suas dificuldades em relação ao seu desenvolvimento e aprendizagem. Dessa forma, é possível perceber a importância do diálogo entre os profissionais da educação especial que atendem esse aluno e os professores da rede regular de ensino, para desenvolver seus objetivos e um trabalho integrado, para potencializar o ensino e a aprendizagem do educando, realizando um trabalho interdisciplinar, como apresenta Ropoli et al. (2010).

A professora afirmou que não se sentia preparada, mas que buscava informações para realizar de maneira mais adequada seu trabalho pedagógico com o aluno investigado. Weisz e Sanchez (2001) esclarecem que o professor necessita buscar conhecimentos, mesmo quando já formados, pois sempre será insuficiente seus saberes para a realização de suas atribuições na sala de aula.

A docente, também foi orientada pela psicopedagoga da escola sobre como trabalhar, realizando mudanças metodológicas para atender ao aluno, fazendo uso de material concreto e relacionando com o contexto do mesmo. Ao realizar essas mudanças metodológicas e as práticas pedagógicas se obteve resultados positivos na aprendizagem do aluno investigado, pois ele demonstrou ampliar seus conhecimentos e percepções relacionadas aos conteúdos matemáticos, aumentando sua autoestima. É importante salientar que o uso de materiais concretos "[...] faz com que o aluno vivencie e compreenda o que está sendo feito. O aluno com discalculia pode necessitar da prática com o uso de itens concretos por mais tempo que a maioria dos alunos" (FARRELL, 2008, p. 80).

A pesquisadora ao realizar as atividades com o aluno investigado, percebeu que tudo o que se buscou sobre discalculia, com os autores abordados neste artigo e as entrevistas realizadas, se completavam, demonstrando todas as relações entre as dificuldades existentes do transtorno e a vivência no cotidiano do ensino e aprendizagem desse aluno.

6 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

É de fundamental importância o professor estar ciente de seu papel perante seus alunos, principalmente àqueles que irão precisar de um maior auxílio, como o aluno discalcúlico, pois foi a partir da observação da defasagem da aprendizagem do aluno, que ele foi encaminhado para especialistas, que se realizou o diagnóstico com equipe multidisciplinar e que teve seu tratamento com atendimento psicopedagógico, adequações e adaptações metodológicas.

Para Farrell (2008, p.75), "há certas habilidades básicas que constituem pré-requisito na matemática. Se elas não estiverem adequadamente desenvolvidas, a criança terá dificuldade para desenvolver habilidades e compreensão subsequentes". Logo, é o professor que deverá criar condições para que o aluno participe das aulas e aprenda, de maneira que suas ações possibilitem vivências relevantes e significativas para o aluno. É o professor, ainda, que deve identificar e reconhecer os conhecimentos adquiridos pelo aluno discalcúlico para conduzir intencionalmente a aprendizagem, obtendo como resultado o progresso contínuo, fazendo uso de diferentes estratégias metodológicas.

Portanto, é possível concluir a importância desta pesquisa, pois verificou-se que, em todos os momentos do estudo, o papel do professor foi significativo no processo de ensino e aprendizagem do aluno com discalculia, desde seu encaminhamento até o seu tratamento. Ora, de fato, é importante que o professor compreenda o processo da aprendizagem, para identificar qualquer alteração para o encaminhamento aos profissionais especializados, para que esses, por sua vez, possam realizar a avaliação e seu diagnóstico. Ao obter o resultado, o professor deve, ao iniciar o trabalho com alunos discalcúlicos, proporcionar intervenções pedagógicas visando ao resgate da autoestima e da autoimagem desse aluno, além da ampliação de seu conhecimento matemático.

Sendo assim, esses transtornos específicos de matemática requerem certa urgência na sua identificação, pois o quanto antes forem diagnosticados, mais fácil tornar-se-á o processo de intervenção. É preciso um olhar atento do professor para perceber as condições de aprendizagem de seu aluno e, se necessário, intervir junto à família e à equipe diretiva.

De modo geral, a inclusão só se tornará efetiva quando professores, escola, família e comunidade trabalharem em conjunto para as superações dos obstáculos constituídos na sociedade. Isto é, "a escola comum se torna inclusiva quando reconhece as diferenças dos alunos diante do processo educativo e busca a participação e o progresso de todos, adotando novas práticas pedagógicas" (ROPOLI et al., 2010, p.9).

Reconhecida a importância do assunto abordado nesta pesquisa, o incentivo a pesquisas e os aprendizados orientados são necessários para estruturar o trabalho do professor e possibilitar o desenvolvimento do aluno, na sala de aula, na escola e na sociedade.

REFERÊNCIAS

BASTOS, José Alexandre. **Matemática:** Distúrbios específicos e dificuldades. In: ROTTA, Newra Tellechea; BRIDI FILHO, César Augusto; BRIDI, Fabiane Romano de Souza. Neurologia e aprendizagem: Abordagem multidisciplinar. Porto Alegre: Artmed, 2016.

BERNARDI, Jussara. **Discalculia:** O que é? Como intervir? Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

BRIDI FILHO, César Augusto *et al*. **Discalculia e intervenção psicopedagógica:** Alan - O aprendizado na conexão dos números. In: ROTTA, Newra Tellechea; BRIDI FILHO, César Augusto; BRIDI, Fabiane Romano de Souza. Neurologia e aprendizagem: Abordagem multidisciplinar. Porto Alegre: Artmed, 2016.

BRIDI FILHO, César Augusto. **Apresentação**. In: ROTTA, Newra Tellechea; BRIDI FILHO, César Augusto; BRIDI, Fabiane Romano de Souza. Neurologia e aprendizagem: Abordagem multidisciplinar. Porto Alegre: Artmed, 2016.

FARRELL, Michael. **Dislexia e outras dificuldades de aprendizagem específicas:** guia do professor. Porto Alegre: Artmed, 2008.

KELLERMANN, Alexandra Cristina Gelinger. **Em busca da aprendizagem eficiente:** A superação da dislexia. Taquara: Faccat. 2008

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da matemática**. São Paulo: Editora Ática, 1991.

OHLWEILER, Lygia. **Introdução aos transtornos da aprendizagem.** In: ROTTA, Newra Tellechea; BRIDI FILHO, César Augusto; BRIDI, Fabiane Romano de Souza. Neurologia e aprendizagem: Abordagem multidisciplinar. Porto Alegre: Artmed, 2016.

ROPOLI, Edilene Aparecida *et al*. **Educação especial na perspectiva da inclusão escolar:** A escola comum inclusiva. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Especial, 2010.

SANTALÓ, Luís A. **Matemática para não-matemáticos.** In: Parra, Cecilia; SAIZ, Irma. Didática da Matemática: Reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SILVA, Joselma Gomes da. **Discalculia:** ressignificar para intervir na sala de aula. In: SAMPAIO, Simaia; FREITAS, Ivana Braga de (orgs.). Transtornos e dificuldades de aprendizagem: entendendo melhor os alunos com necessidades educativas especiais. 2. ed. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2014.

VIEIRA, Eliane. **Transtornos na aprendizagem da matemática:** número e discalculia. Revista Ciências e Letras, n.35, p.109 - 119, 2004.

WEISZ, Telma; SANCHEZ, Ana. **O diálogo entre o ensino e a aprendizagem.** São Paulo: Editora Ática, 2001.

CAPÍTULO 7

DISTRIBUIÇÃO ODD LOG-LOGÍSTICA CAUCHY: TEORIA E APLICAÇÕES

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 05/01/2021

Beatriz Nascimento Gomes
Universidade Federal do Acre, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias
Rio Branco – Acre
http://lattes.cnpq.br/5715013292960020

Altemir da Silva Braga
Universidade Federal do Acre, Centro de Ciências Exatas e Tecnologias
Rio Branco – Acre
http://lattes.cnpq.br/2867664802722518

RESUMO: Na estatística, distribuições de probabilidade com demonstrações matemáticas, estudos de simulação computacional e com aplicações em casos reais são criadas rotineiramente. Este trabalho trata-se de uma distribuição simétrica chamada Odd Log Logística Cauchy – OLL Cauchy, sendo esta uma extensão do modelo Cauchy, porém contendo um parâmetro adicional de forma. Ao longo do trabalho, ver-se-á expansões e propriedades matemáticas demonstradas, como a função quantílica e a aplicação do método máxima verossimilhança. Esta distribuição é adequada quando é identificado *outliers*. O modelo foi aplicado em um estudo de delineamento inteiramente casualizado, onde se queria comparar tratamentos e, para isso, foi utilizado testes de hipóteses. Neste estudo, o modelo OLL Cauchy apresentou bons resultados, portanto, pode ser recomendado para modelar dados com problemas de outliers.
PALAVRAS - CHAVE: Estatística. Probabilidade. Outliers. Modelagem de dados.

ODD DISTRIBUTION CAUCHY LOG-LOGISTIC: THEORY AND APPLICATIONS

ABSTRACT: In the statistics, probability distributions with mathematical demonstraior, computacional simulation approach and real cases applications are made commonly. This article shows a symmetric distribution named Odd Log-Logistic Cauchy – OLL Cauchy, extending Cauchy model, but with an shape additional parameter. Throughout, mathematical expantion e properties are demonstrated as quantilic function and maximum likelihood method. This model is appropriate when outliers are identified in completely randomized design study which treatments were comparated and for that hyphotesis test were made. In this work, OLL Cauchy model showed good results, therefore, it may be recommended to solve data with outliers.
KEYWORDS: Statistics. Probability. Outliers. Data modelling.

1 I INTRODUÇÃO

A estatística é utilizada pelas mais diversas áreas com o objetivo de coletar, organizar, descrever e realizar análise de dados, sejam eles amostrais ou oriundos de experimentos.

Um problema comum de se encontrar na

estatística paramétrica são os *outliers*, que são valores atípicos. A presença desses valores pode ocasionar inferências erradas no resultado da pesquisa. Duas formas de tratá-los corretamente são: aplicar a estatística paramétrica ou a técnica de transformação de dados. As técnicas mais utilizadas são a logarítmica, raiz quadrada, transformação angular, dentre outras (BARBIN, SPANÓ, *et al.,* 2000).

Este estudo traz uma nova distribuição de probabilidade cujo objetivo é modelar *outliers* e solucionar possíveis problemas de homogeneidade de variância, outro problema comum quando se faz análise de variância. Este modelo foi intitulado como Odd Log-Logística – Cauchy por ser uma extensão do modelo Cauchy, possuindo, também, um parâmetro adicional de forma. Por fim, o modelo foi aplicado em um ensaio inteiramente casualizado que avaliava o efeito do teor de boro e enxofre na produção de grãos de soja. A partir do ensaio, foi ajustado um modelo de regressão, que tem como objetivo verificar a relação existente entre os efeitos das covariáveis e a variável resposta, através de uma função matemática.

Na estatística experimental, a distribuição normal é mais utilizada, porém apresenta dificuldades no tratamento de *outliers* ou assimetrias (SERLE, CASELLA E McCULLOH, 2009). Comparado ao modelo *t-Student*, o Log-Logística Cauchy é mais flexível e simétrico.

Ao longo do trabalho, expansões matemáticas foram desenvolvidas e para estimar os parâmetros foi utilizado o método da máxima verossimilhança. O modelo foi aplicado em um ensaio inteiramente casualizado, em que foi feito teste de hipóteses de contrastes de diferenças entre médias ao nível de 5% de probabilidade.

2 I MÉTODOS

Alzaatreh, Famoye e Lee (2013) propuseram uma família de distribuições T-X. Seja $r(s)$ uma função densidade de probabilidade (fdp) de variável aleatória $T \in [a,b]$, para $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Seja $W\left(F(x)\right)$ uma função de uma fdp $F(x)$ de uma variável aleatória *X*, então $W\left(F(x)\right)$ satisfaz as seguintes condições:

- $W\left(F(x)\right) \in [a,b]$;
- $W\left(F(x)\right)$ é diferenciável e monotonicamente não-decrescente;
- $W\left(F(x)\right)$ tende para a assim como x tende para -∞ e, também, b assim como x tende para ∞.

Considere *X* uma variável aleatória com fdp $f(x)$ e uma função de distribuição cumulativa (cdf) $F(x)$. Seja T uma variável aleatória contínua com uma fdp $r(s)$ definida em $[a,b]$. Seja a função cdf uma nova família de distribuição definida por:

$$\int_{a}^{W[G(Y)]} r(s)ds \, .$$

Em que $W\left[G(x)\right]=\dfrac{G(x;\mu,\sigma)}{G^{*}(x;\mu,\sigma)}$, $G(x;\mu,\sigma)=1-G^{*}(x;\mu,\sigma)$ e $r(s)=\dfrac{\alpha s^{\alpha-1}}{\left(1+s^{\alpha}\right)^{2}}$; para $s>0$.

A função densidade de probabilidade Cauchy é dada por:

$$g(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\pi\sigma(1+z^{2})} \, . \qquad (1)$$

Em que $z={(x-\mu)}/{\sigma}$, $x\in\mathbb{R}$ e $\mu\in\mathbb{R}$ é o parâmetro de locação e $\sigma>0$ é o parâmetro de escala. A distribuição padrão Cauchy é $\mu=0$ e $\sigma=1$, em que a função distributiva (fd) é:

$$G(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)+\frac{1}{2} \qquad (2)$$

Foi definida uma extensão da distribuição Cauchy, com caudas mais pesadas que a *t-Student*, chamada de Odd Log Logística Cauchy (OLL-Cauchy). A sua função distribuição de probabilidade é:

$$F(x;\mu,\sigma,\alpha)=\int_{0}^{W[G(Y)]}\frac{\alpha s^{\alpha-1}}{\left(1+s^{\alpha}\right)^{2}}ds=\frac{G^{\alpha}(x;\mu,\sigma)}{G^{\alpha}(x;\mu,\sigma)+\left[1-G\ (x;\mu,\sigma)\right]^{\alpha}} \qquad (3)$$

Considerando um parâmetro a > 0 e derivando a função anterior, é obtida a fdp da OLL-Cauchy. Sendo esta:

$$f(x;\mu,\sigma,\alpha)=\frac{\alpha\left(\Gamma+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2}-\Gamma\right)^{\alpha-1}}{\pi\sigma\left(1+z^{2}\right)\left[\left(\Gamma+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{1}{2}-\Gamma\right)^{\alpha}\right]^{2}} \qquad (4)$$

onde $\Gamma=\frac{1}{\pi}\arctan(z)$.

O parâmetro adicional de forma, a, é calculado da seguinte forma:

$$\alpha = \frac{\log\left(\frac{F(x;\mu,\sigma,\alpha)}{F^*(x;\mu,\sigma,\alpha)}\right)}{\log\left(\frac{G(x;\mu,\sigma,\alpha)}{G^*(x;\mu,\sigma,\alpha)}\right)}.$$

A figura abaixo mostra algumas formas da função (4) e é feita uma comparação do modelo deste trabalho com o modelo normal e *t-Student*. Na figura (a), o modelo OLL-Cauchy apresenta caudas mais pesadas para valores de x, aproximadamente, menores que -2,5 e maiores que 2,5.

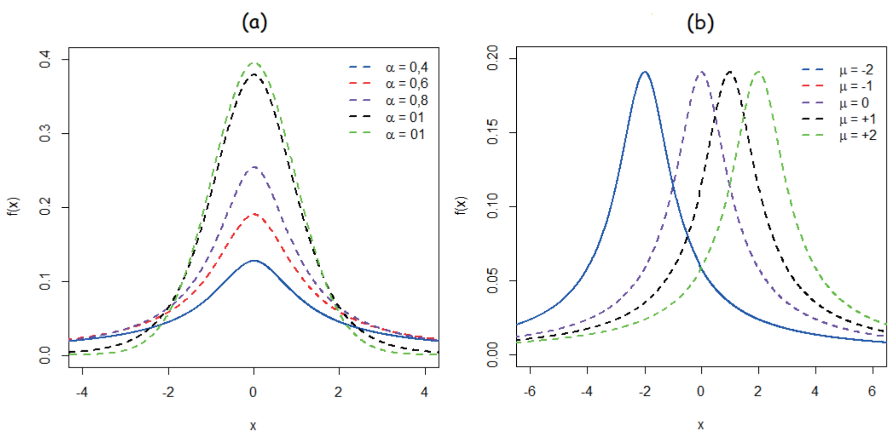


Figura 1: (a) representa o modelo OLL Cauchy e os modelos normal e t-Student; (b) representa o modelo OLL Cauchy com alpha fixo.

A função quantílica foi utilizada para os estudos de simulação e análise de resíduos. Esta função é dada como se segue.

$$Q(u) = G(x;\mu,\sigma)\left[h(u;\alpha)\right],$$

em que $u \sim U(0,1)$ e $G(x;\mu,\sigma)$ é a função quantílica do modelo OLL-Cauchy. O componente $\left[h(u;\alpha)\right]$ é dado por:

$$h(u;\alpha) = u^{\frac{1}{\alpha}}\left[u^{\frac{1}{\alpha}} + (1-u)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-1}.$$

2.1 Expansões do Modelo OII-Cauchy

Por definição, a exponenciada ("Exp-G") de distribuição $\Phi(x)$, $Cauchy \sim Exp^{c}G$, dada por:

$$H_c(x) = \Phi(x)^c \quad \text{e} \quad h_c(x) = c\phi(x)^c \Phi(x)^{c-1}$$

É desejada uma combinação linear para a função $F(x)$. Para isso, foi utilizado uma série de potências dada por:

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k \quad \text{com} \quad a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+j} \binom{a}{j} \binom{j}{k}$$

Considerando a binomial generalizada expandida, tem-se:

$$(1-z)^b = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{b}{j} z^j .$$

Após fazer algumas transformações, finalmente $F(x)$ passa a ser:

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{b}{k} \Phi(x)^k}$$

A fim de simplificação, considere:

$$b_k = \left[a_k + (-1)^k \binom{a}{k} \right].$$

Portanto,

$$F(x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k \Phi(x)^k}.$$

Por fim,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi(x)^k \quad \text{em que} \quad c_k = b_0^{-1} \left(a_k + b_0^{-1} \sum_{r=1}^{k} b_r c_{k-r} \right).$$

Derivando $F(x)$ tem-se a fdp X expressa por uma combinação linear dada por:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+1} h_{k+1}(x) \, ,$$

em que $h_{k+1}(x) = (k+1)\Phi(x)^k \phi(x)$.

2.2 Estimação por Máxima Verossimilhança para o Modelo Oll Cauchy

Sob a suposição de que os resíduos seguem uma distribuição $OLLCauchy(x;\sigma;\alpha)$, um modelo de regressão foi ajustado. Usualmente, o modelo normal é preferível pelos profissionais das mais diversas áreas. Contudo, em decorrência da presença dos valores extremos, a distribuição normal pode ser considerada inadequada. Portanto, é apresentado a função log-verossimilhança do modelo $OLLCauchy(x;\sigma;\alpha)$, destacando os testes de hipóteses e intervalo de confiança.

De forma geral, o modelo de um ensaio inteiramente casualizado tem a seguinte forma:

$$Y_{ij} = m + \tau_t + \sigma\varepsilon_{ij} \, ,$$

em que Y_{ij} representa o valor esperado do tratamento t ; m é o efeito da média geral; τ_t é o efeito do tratamento t e $\varepsilon_{ij} \sim OLLCauchy(0;\sigma;\alpha)$ representa os efeitos que não possuem controle do ensaio experimental. Os iteradores $t = 1,2,...,I$ e $j = 1,...,J$, onde o primeiro se refere ao número de tratamentos e o segundo ao número de repetições.

Considere $x_1, x_2, ..., x_n$ uma amostra aleatória da distribuição $OLLCauchy(x;\sigma;\alpha)$; um vetor de parâmetros $\theta = (m, \tau^{\tau}, \sigma, \alpha)^{\tau}$, em que $\tau = (\tau_1, ..., \tau_n)$. Desta forma, o logaritmo da função verossimilhança é:

$$l(\theta) = IJ\left[\log\left(\frac{\alpha}{\pi\sigma}\right)\right] + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left\{\log\frac{\left[\left(\Gamma_{ij} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - \Gamma_{ij}\right)\right]}{\left(\Gamma_{ij} + z_{ij}^{2}\right)}\right\} - 2\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\left\{\log\left[\left(\Gamma_{ij} + \frac{1}{2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{2} - \Gamma_{ij}\right)^{\alpha}\right]^{2}\right\}.$$

Maximizando esta equação, é possível encontrar as estimativas da máxima verossimilhança $\hat{\theta}$. Para chegar nesta equação, foi utilizado uma ferramenta computacional denominada R. Através do pacote “Optim”, os métodos Nelder-Mead e L-BFGS -B foram implementados. Fez-se necessário encontrar as componentes do vetor score $U(\theta)$. A função log verossimilhança foi derivada em relação a $m, \mu, \tau, \sigma, \alpha$. As componentes do vetor score são $U_m(\theta); U_n(\theta); U_o(\theta); U_p(\theta)$. Igualando essas equações a zero e resolvendo-

as, obtém-se as estimativas da máxima verossimilhança.

Para encontrar o intervalo de confiança, ICR, considera-se que o vetor de parâmetros θ, em seu espaço paramétrico, tem uma distribuição assintótica $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}-\theta\right)$ normal multivariada $N_{I+4}\left(0,K(\theta)^{-1}\right)$ em que $K(\theta)$ é uma matriz da informação esperada. As inferências assintóticas para os vetores de parâmetros *θ* podem ser feitas utilizando aproximação normal e os erros-padrão podem ser obtidos pela raiz quadrada dos elementos da diagonal principal da inversa da matriz de informação observadas. Desta forma, hipóteses podem ser formuladas e testadas.

A comparação de diferenças de tratamentos foi realizada através de intervalos de confiança restringindo as colunas da matriz de delineamento experimental. Utiliza-se um *Trat* como referência, o iguala a zero e compara todos os outros tratamentos em relação a ele. A linguagem R fornece uma função chamada *"relevel(,)"* que permite fazer essas restrições.

2.3 Aplicação no Ensaio Inteiramente Casualizado

O ensaio se tratou da avaliação do efeito de teor de boro e enxofre na produção de grãos de soja considerando 7 tratamentos chamados de *Trat_1, Trat_2, Trat_3, Trat_4, Trat_5, Trat_6* e *Trat_7*. A figura 2 traz um resumo estatístico destes tratamentos.

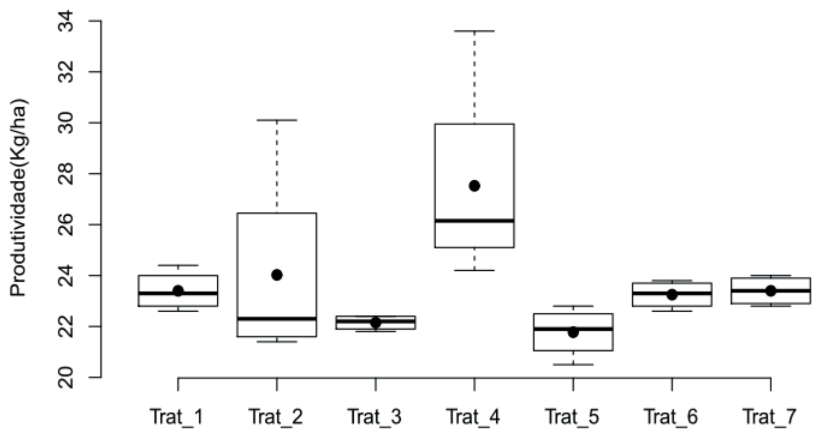


Figura 2: boxplot para cada tratamento.

É possível ver que em alguns tratamentos (*Trat_1, Trat_2 e Trat_4*) a média ficou acima da mediana e o restante ficou praticamente igual. Portanto, o modelo normal se apresentou inadequado para este caso, além da possível violação da homogeneidade exigida na análise de variância. Neste caso, o modelo apresentado neste trabalho, Odd

Log Logística Cauchy (OLL Cauchy), pode ser utilizado a fim de ajustar o teor de boro e enxofre nas produções de grão de soja.

A tabela abaixo mostra as estimativas de máxima verossimilhança para os contrastes de duas médias e os respectivos intervalos de confiança ao nível de 5% de probabilidade. Quando o ICR engloba o 0 (zero), quer dizer que, estatisticamente, os tratamentos são iguais a zero.

Hipóteses	Estimativas	IC_{inf}	IC_{sup}	Hipóteses	Estimativas	IC_{inf}	IC_{sup}
$H_0: \tau_2 - \tau_1 = 0$	-1.1392	-1.9228	-0.3556	$H_0: \tau_1 - \tau_2 = 0$	0.2306	-0.7724	1.2336
$H_0: \tau_3 - \tau_1 = 0$	-1.3216	-2.0120	-0.6312	$H_0: \tau_3 - \tau_2 = 0$	-1.1956	-2.2226	-0.1687
$H_0: \tau_4 - \tau_1 = 0$	2.9432	2.2814	3.6050	$H_0: \tau_4 - \tau_2 = 0$	3.1143	2.1234	4.1052
$H_0: \tau_5 - \tau_1 = 0$	0.3127	-0.6092	1.2346	$H_0: \tau_5 - \tau_2 = 0$	0.2634	-0.7174	1.2442
$H_0: \tau_6 - \tau_1 = 0$	0.2200	-0.5144	0.9544	$H_0: \tau_6 - \tau_2 = 0$	0.2324	-0.7255	1.1903
$H_0: \tau_7 - \tau_1 = 0$	-0.9595	-1.5705	-0.3486	$H_0: \tau_7 - \tau_2 = 0$	-0.7591	-1.6680	0.1498
$H_0: \tau_1 - \tau_3 = 0$	0.4091	-0.5116	1.3298	$H_0: \tau_1 - \tau_4 = 0$	-1.1067	-2.0274	-0.1860
$H_0: \tau_2 - \tau_3 = 0$	-1.2922	-2.2985	-0.2859	$H_0: \tau_2 - \tau_4 = 0$	-2.3452	-3.3514	-1.3389
$H_0: \tau_4 - \tau_3 = 0$	2.9686	1.9765	3.9606	$H_0: \tau_3 - \tau_4 = 0$	5.5827	4.5906	6.5747
$H_0: \tau_5 - \tau_3 = 0$	0.2729	-0.6278	1.1736	$H_0: \tau_5 - \tau_4 = 0$	-1.3638	-2.2645	-0.4631
$H_0: \tau_6 - \tau_3 = 0$	0.1465	-0.7509	1.0438	$H_0: \tau_6 - \tau_4 = 0$	-1.3091	-2.2064	-0.4118
$H_0: \tau_7 - \tau_3 = 0$	-0.7554	-1.5697	0.0589	$H_0: \tau_7 - \tau_4 = 0$	-2.2708	-3.0851	-1.4565
$H_0: \tau_1 - \tau_5 = 0$	-0.1759	-1.1331	0.7813	$H_0: \tau_2 - \tau_6 = 0$	0.0599	-0.6912	0.8110
$H_0: \tau_2 - \tau_5 = 0$	-1.3995	-2.3587	-0.4402	$H_0: \tau_4 - \tau_6 = 0$	-1.5757	-2.3758	-0.7756
$H_0: \tau_3 - \tau_5 = 0$	-1.6022	-2.5056	-0.6988	$H_0: \tau_5 - \tau_6 = 0$	-1.2454	-2.0436	-0.4473
$H_0: \tau_4 - \tau_5 = 0$	2.6797	1.8153	3.5440	$H_0: \tau_7 - \tau_6 = 0$	2.8264	2.0764	3.5763
$H_0: \tau_6 - \tau_5 = 0$	-0.0869	-1.0133	0.8396	$H_0: \tau_1 - \tau_6 = 0$	0.0646	-0.6597	0.7890
$H_0: \tau_7 - \tau_5 = 0$	-1.2398	-2.0730	-0.4067	$H_0: \tau_3 - \tau_6 = 0$	-0.9330	-1.5688	-0.2971

Tabela 1: Resultado da comparação feita entre os 7 tratamentos.

3 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A nova distribuição de probabilidade, Odd Log Logística Cauchy, estende a distribuição Cauchy adicionando um parâmetro de forma obteve sucesso em um estudo de delineamento inteiramente casualizado, onde a finalidade era comparar o teor de boro e enxofre nas produções de grão de soja. O modelo mostrou-se matematicamente tratável e ajustável em dados que apresentam problemas de homogeneidade. O ajuste da OLL Cauchy foi feito utilizando a ferramenta computacional R para implementar o método da máxima verossimilhança. Provou-se que a distribuição pode ser utilizada em situações práticas de ensaios experimentais, sem pressupostos exigidos pela análise de variância.

Ao nível de 5% de probabilidade, o modelo Odd Log Logística Cauchy forneceu diferenças significativas entre contrastes de duas médias dos tratamentos.

REFERÊNCIAS

ALZAARETH, A.; LEE, C.; FAMOYE, F. A new method for generating families of continuous distributions. **Metron**, v. 1, n. 71, Agosto 2013.

BARBIN, E. L.; SPANÓ, J. C. E.; SILVA, R. S. da; PÉCORA, J. D.; Departamento de Odontologia Restauradora. **forp**, 2000. Disponivel em: <http://www.forp.usp.br/restauradora/gmc/gmc_livro/gmc_livro_cap13.html>. Acesso em: 27 Junho 2019.

BRAGA, A. S.; CORDEIRO, G. M. ; ORTEGA, E. M. M.; CRUZ, J. N.C. The Odd Log-Logistic Student t Distribution: Theory and Applications. **Journal of Agricultural Biological and Environmental Statistics**, v. 4, n. 22, Agosto 2017.

BRAGA, A. S.; CORDEIRO, G. M.; ORTEGA, E.; CRUZ, J. N. da. The odd log– logistic normal distribution: Theory and applications in analysis of experiments. **Journal of statistical theory and practice**, v. 10, n. 2, p. 311 - 335, Janeiro 2016.

BRYSON, M. C. Heavy-Tailed Distributions: Properties and Tests. **Technometrics**, v. 16, n. 1, p. 61 - 68, Fevereiro 1974.

FAMOYE, F. Continuous Univariate Distributions, Volume 1. **Technometrics**, v. 4, n. 37, p. 466 - 466, Novembro 1995.

LEAL D. P., THALITA K.; VILLELA S., TACIANA; M., Joel Augusto. Ajuste dos modelos Gompertz e Logístico aos dados de crescimento de frutos de coqueiro anão verde. **Ciência Rural**, v. 43, n. 5, 2013.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F.A; BOES, D. C. **Introduction to the Theory of Statistics**, McGraw-Hill, New York, n. 3 405-406, 1974.

REGAZZI, A. J.; SILVA, C. H. O.. Teste para verificar a igualdade de parâmetros e a identidade de modelos de regressão não-linear. I. dados no delineamento inteiramente casualizado. **Revista de Matemática e Estatística**, v. 22, n. 3, p. 33-45, 2004.

SAMPAIO, A. A. S. Uma Introdução aos Delineamentos Experimentais de Sujeito Único. **Interação em Psicologia**, v. 1, n. 12, p. 151 - 164, Janeiro/Junho 2008.

SEARLE, S.; CASSELLA, G.; MCCULLOUCH, C. Variance Components. **New- York: Jonh Wiley-Sons**. DOI: https://doi. org/10.1002/9780470316856, 1992.

CAPÍTULO 8

RECURSOS DIDÁTICOS PARA PRODUZIR, LER, ESCREVER E PENSAR OS NÚMEROS

Data de aceite: 17/02/2021
Data da submissão: 21/01/2021

Helena Dória Lucas de Oliveira
Universidade Federal do Rio Grande do Sul – UFRGS
Porto Alegre - RS
http://lattes.cnpq.br/5903447387474551

RESUMO: Este texto é uma versão ampliada do relato de experiência apresentado no V Encontro de Educação Matemática nos Anos Iniciais e IV Colóquio de Práticas Letradas realizado na Universidade Federal de São Carlos. A experiência relatada tratou de uma oficina realizada no Projeto de Formação de Professores do PNAIC-UFRGS. O objetivo da oficina foi praticar e pensar a produção de números, usando quatro recursos didáticos manipulativos de fácil confecção: Dígitos móveis, Fichas escalonadas, Números em palavras e Varal numérico. A oficina permitiu a vivência e análise de diversas atividades que, por terem o apoio de recursos pedagógicos diferentes, mobilizaram hipóteses e aprendizagens diferenciadas sobre a compreensão do Sistema de Numeração Decimal, suas regularidades e suas especificidades. O trabalho também oportunizou pensar outras atividades escolares para sistematizar, consolidar, ampliar e complexificar a escrita, a leitura e a sequência dos números.

PALAVRAS - CHAVE: Sistema de Numeração Decimal; Escrita de números; Formação continuada de professores; Recursos didáticos.

TEACHING RESOURCES TO PRODUCE, READ, WRITE AND THINK NUMBERS

ABSTRACT: This text is an expanded version of the experience reported at the 5th Meeting of Mathematical Education in Elementary School and IV Colloquium on Literacy Practices, held at the Federal University of São Carlos. The report focused on a workshop held at the PNAIC-UFRGS Teacher Training Project. The objective of the workshop was to approach and practice number production, using four easy-to-make manipulatives and teaching resources: Movable Digits, Staggered Cards, Number writing and Numerical line. The workshop enabled the experience and analysis of several activities which, supported by different pedagogical resources, fostered various hypotheses and differentiated learning of the understanding of the Decimal Numbering System, its regularities, and specificities. The work also encouraged the development of other school activities to systematize, consolidate, expand, and develop writing, reading and number sequencing.

KEYWORDS: Decimal Numbering System; Number writing; Continuing teacher education; Didactic resources.

1 | INTRODUÇÃO

Este artigo é uma versão ampliada e modificada do relato de experiência apresentado no V Encontro de Educação Matemática nos Anos Iniciais e IV Colóquio de Práticas Letradas

realizado na Universidade Federal de São Carlos, em setembro de 2018. Descrevo aqui, reflexivamente, uma oficina planejada para profissionais que atuam nos cinco primeiros anos da escolarização básica. A oficina foi desenvolvida com participantes da Formação Presencial Anos Iniciais do Projeto Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa, desenvolvido pela Faculdade de Educação da universidade em que atuo, no primeiro semestre de 2018. Foi uma atividade de 1h30min de duração, replicada 4 vezes, em turmas de 30 profissionais.

Para preparar a oficina, selecionei práticas pedagógicas que tenho desenvolvido com estudantes do Curso de Pedagogia e aprimorei recursos didáticos manipulativos utilizados durante as aulas. Assim, este é o relato tanto da experiência de planejamento, revisitando meu trabalho docente, como da experiência de desenvolver as ações planejadas com o grupo de profissionais participantes. A experiência de planejar exigiu refletir sobre minha prática docente vivenciada em aulas da graduação e condensar, em quatro recursos pedagógicos, atividades potentes para a compreensão da escrita e leitura de números. Esses movimentos deram forma à oficina que intitulei *A produção de números: Criar e aprender em Educação Matemática*.

O objetivo da oficina era apresentar recursos didáticos manipulativos para pensar a escrita, a leitura e a produção de números, a partir de atividades com uma mesma solicitação: produzir números. O caráter dinâmico da oficina foi garantido pela escolha de quatro recursos didático-pedagógicos diferentes centrados em aspectos distintos da compreensão do número. As atividades foram preparadas com grau de dificuldade adequado a profissionais experientes. Mas, é possível, escolher parte de cada recurso didático e pensar atividades apropriadas para crianças do 1º ao 5º ano. Os materiais aqui discutidos têm essa versatilidade.

Nestes anos de experiência, tenho privilegiado, sempre que possível, recursos didáticos manipulativos criados com fichas de papel, pois proporcionam facilidade no transporte por serem leves e não volumosos e podem ser feitos com baixo custo financeiro. Acrescento ainda outra característica que considero importante. Os recursos manipulativos produzidos com fichas de papel possibilitam que as crianças, sob nossa orientação, possam dobrar, cortar, rasgar, escrever, conferir, errar, reescrever, enfim, possam confeccioná-los uma e outra vez, se for necessário. Essa prática, além de estimular a atividade motora, permite às crianças raciocinar sobre aspectos estruturais distintos de cada material, percebendo sua lógica de funcionamento e consolidando suas aprendizagens.

A seguir, apresentarei os quatro recursos didáticos que selecionei para a oficina: Varal Numérico, Dígitos Móveis, Fichas Escalonadas e Números em Palavras.

2 I VARAL NUMÉRICO: PRODUZIR NÚMEROS COM INTENCIONALIDADE

O recurso didático Varal Numérico consta de metades de folhas de ofício, com uma dobra, marcando aproximadamente um quarto do pedaço de papel, estando este na posição vertical. Essa dobra é necessária para pendurar o papel num cordão instalado na sala: o varal. Este recurso didático foi elaborado com as/os participantes na oficina, a partir de folhas repartidas para cada dupla, ficando cada uma/um com uma metade.

Após separar a turma em dois grupos, a solicitação foi:

Grupo A: Escreva, com algarismos, um número qualquer que você saiba ler.

Grupo B: Escreva, com algarismos, um número com as 3 condições abaixo:
a) ter quatro dígitos;
b) dois de seus dígitos devem ser 0 e 9;
c) o dígito 9 deve ocupar a ordem das unidades.

Com a exposição das escritas do Grupo A no varal, notamos uma variedade de números, ou pequenos ou muitos grandes. Eis alguns deles: 8 – 15 – 286 – 48 – 2 – 67 – 2.589 – 7.683.412. Prosseguimos com outras atividades de modo coletivo, pois o Varal Numérico permite a movimentação fácil e rápida dos números, além de deixá-los bem visíveis à turma. Após ordenar os números, crescente ou decrescentemente; pode-se solicitar o exercício mental de, com 2 operações aritméticas, partir de um número e chegar em outro[1]; ou pedir a inserção de quadras numéricas como 5; 50; 500 e 5.000; ou ainda classificar os números a partir de critérios inventados pela turma (pares e ímpares; divisíveis por 3, entre outros critérios).

As produções do Grupo B tiveram uma diversidade menor, dadas as condições propostas. Eis algumas escritas: 2.209 – 5.309 – 3.709 – 4.089 – 8.029. Para estes números, as atividades coletivas foram solicitar a leitura e o sucessor de cada um. Também seria desafiante solicitar o exercício mental de adicionar 11 a cada número e socializar os procedimentos de cálculo.

Decidi incluir o Varal Numérico na oficina para discutirmos sobre a intencionalidade docente no planejamento, analisando as complexidades inerentes do Sistema de Numeração Decimal em cada grupo de números produzidos. Algumas atividades se tornam mais ou menos desafiantes dependendo do conjunto de números produzidos. Instiga mais o pensamento, ler e escrever o sucessor dos números do Grupo B, pois eles têm zeros intermediários e terminam em 9. Atiça mais o raciocínio, realizar classificações ou intercalar 5, 50, 500 e 5.000 na lista numérica do Grupo A, dada a diversidade dos números. Assim, busquei evidenciar, comparando os números produzidos após as duas solicitações e as

1 Se os números já ordenados que estão no Varal são 2 – 8 – 15 – 48 – 67 – ..., o exercício seria: 2x4=8; 8x2–1=15; 15x3+3=48; e vai ficando mais difícil, e vai aumentando o desafio.

atividades seguintes, a importância de estabelecer objetivos em nossos planejamentos para estimular ainda mais a atividade intelectual das crianças, provocando consistência e ampliação em seus conhecimentos sobre os números.

3 I DÍGITOS MÓVEIS: PENSAR O VALOR RELATIVO DOS ALGARISMOS

Outro recurso didático apresentado foi o conjunto de Dígitos Móveis. Em meu trabalho docente, cuido o uso das palavras dígitos e algarismos, diferenciando-as da palavra números. Justifico essa diferença para tornar mais compreensível as solicitações e explicando que dígitos ou algarismos são elementos que compõem um número[2]. Costumo dizer, fazendo uma analogia, que escrevemos palavras com letras; escrevemos números com dígitos/algarismos.

Dígitos Móveis é um conjunto de dez fichas, cada uma com um algarismo escrito, do 0 ao 9. Também é possível encontrá-los recortados, em EVA, nas lojas especializadas. Na oficina, levei os Dígitos Móveis feitos com o material emborrachado. A solicitação da atividade foi:

E*scolha 3 dígitos diferentes, produza o máximo de números possíveis e anote-os.*

Com os dígitos 2, 8 e 7, por exemplo, os números produzidos são: 2 – 8 – 7 – 28 – 27 – 82 – 87 – 72 – 78 – 728 – 782 – 287 – 278 – 827 – 872. Não fixei, na solicitação, se o número deveria ter um, dois ou três dígitos. Mas, quando uma professora participante perguntou, a decisão do grupo foi deixar a produção livre, acrescentando o impedimento de repetir dígitos, como em 277, por exemplo.

Movimentar os Dígitos Móveis para produzir números propicia articular o valor de cada dígito (valor absoluto) com o valor que assumirá na composição do número (valor relativo) e perceber que podem ser diferentes. O valor do 8 nos números 28, 782 e 827 varia de acordo com a ordem que ocupa: ora 8, ora 80 e ora 800, respectivamente. Indícios da compreensão da diferença entre valor absoluto e valor relativo de um dígito em um número aparecem quando se exercita a leitura. Para ler 782, formado pelos dígitos 7, 8 e 2, fala-se *setecentos e oitenta e dois,* sem pronunciar as palavras *sete* e *oito*, que designam, além do nome dos algarismos, o valor absoluto deles. A palavra *dois* é pronunciada na leitura, pois o dígito 2 ocupa a ordem das unidades, única ordem de um número em que o valor absoluto do dígito coincide com seu valor relativo.

E como saber ao ler um número que tenha o dígito 8, se é oito, oitenta ou oitocentos?

2 Não tenho feito a distinção entre número e numeral no cotidiano de sala de aula, a não ser em momento adequado para apresentar o vocabulário técnico e conceitual. Sinto-me acompanhada de autoras conhecidas da literatura pedagógica de educação matemática presentes nas Referências deste artigo.

É necessário atentar para a posição que o dígito 8 ocupa no número, o que é exatamente o aspecto que as crianças menos prestam atenção, tal como afirma Terezinha Carraher:

> A utilização da posição como indicador do valor relativo, apesar de extremamente prática na escrita, representa mais uma complicação para a criança. A posição de um símbolo em relação a outro não é um aspecto do mundo que interessa à criança tanto como sua forma, sua cor ou seu tamanho (1986, p.60).

Uma preocupação recorrente das professoras a cada solicitação era saber o total de números que se podia produzir. Neste caso, escolhendo dígitos diferentes de zero e distintos entre si, o total é de 15 números com até 3 dígitos. Mas um grupo escolheu os dígitos 6, 0 e 4. E uma professora apresentou 048 e 48 como sendo diferentes, o que gerou um debate e a posterior compreensão de que ambos os registros correspondiam à mesma quantidade, ou seja, eram o mesmo número. Assim, quando um grupo escolhe o dígito 0, a quantidade de números formados é menor, pois não é possível contabilizar os números que têm o 0 na ordem da dezena (para números de 2 dígitos) e da centena (para números de 3 dígitos). Perguntar quantos números podem ser produzidos, especificando a situação e o recurso didático, pode se configurar em estimulantes atividades para as crianças de 4º e 5º anos, por exemplo, exercitando o pensamento combinatório.

4 I FICHAS ESCALONADAS: APOIAR A LEITURA DE NÚMEROS

O material Fichas Escalonadas consta nos Cadernos do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC (BRASIL, 2014) e é um conjunto de 27 fichas estreitas com mesma largura e comprimentos diferentes. As fichas menores são aquelas em que estão os nove algarismos, de 1 a 9. Há outras nove fichas com as dezenas, de 10 a 90, mais compridas. Por fim, temos as fichas com as nove centenas, de 100 a 900, um pouco mais longas.

Para esta oficina, produzi uma extensão do material, introduzindo fichas com as nove unidades de milhar, do 1.000 ao 9.000[3]. O objetivo dessa alteração no material foi expandir o pensamento sobre a sequência numérica, incitando reflexões nas/nos profissionais participantes sobre números com mais de uma classe. Essa extensão também é apresentada pelas autoras Aragão e Vidigal (2012), que chamam o material de Fichas Sobrepostas. Ainda, incorporei ao material um corte em zigue-zague na borda lateral direita, para indicar a borda em que as fichas devem ser emparelhadas ao compor um número. O uso do material dá-se sobrepondo as fichas de modo escalonado e tendo como referência a borda lateral direita. As fichas 30, 600 e 8, por exemplo, sobrepostas, deixando as mais longas embaixo, e emparelhadas na borda em zigue-zague, formam o número 6 3 8.

Tanto nos Cadernos do PNAIC (BRASIL, 2014), como em Aragão e Vidigal (2012), as

3 Para separar a classe do milhar, não deixo de escrever o ponto, já que é um apoio à leitura.

fichas são brancas. No entanto, confeccionei as fichas com cores diferentes, para facilitar a identificação delas, como poderá ser percebido na solicitação. Utilizei as seguintes cores: verde para as unidades ou escrita dos algarismos; rosa para dezenas, azul para centenas e bege para as fichas com as unidades de milhar.

Com as Fichas Escalonadas solicitei:

> *Escolha uma ficha de cada cor e, utilizando no mínimo 2 fichas, produza o máximo de números possíveis.*
>
> *Escreva esses números com algarismos em uma folha.*

Por exemplo, com a ficha bege 9.000, com a ficha azul 700, com a rosa 40 e a verde 1, produzem-se os números: 9.741; 9.700; 9.040; 9.001; 9.740; 9.701; 9.041; 740; 701; 741 e 41.

Este material permite a visualização dos valores relativos de cada dígito que compõe um número, auxiliando na leitura e na escrita por extenso, principalmente naqueles em que há zeros em ordens intermediárias. Esta é a característica potente deste material. O uso do zero para representar classes ou ordens vazias gera confusões frequentes na escrita de números a partir de ditados, enfatiza Carraher (1986, p.64). O modo de ler o número 9.701, por exemplo, é praticamente a junção das palavras quando pronunciamos os registros de cada ficha: *nove mil, setecentos e um*. E, 9.000, 700 e 1 são os valores relativos dos dígitos 9, 7 e 1 no número em questão e é o que está escrito nas fichas. O material Fichas Escalonadas proporciona à criança visualizar esses valores. Na oficina, sublinhei que não é necessário destacar esses conceitos e essa nomenclatura. Penso que, antes de dar ênfase e dar a conhecer esse vocabulário, o central é propiciar às crianças atividades e materiais em que necessitem articular as aprendizagens que já possuem e construir novas hipóteses.

Durante a aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal, é comum as crianças utilizarem o apoio da numeração falada para escrever números multidígitos (LERNER; SADOVSKY, 1996). Para escrever com algarismos *duzentos e trinta e dois*, por exemplo, escrevem 200302 ou 20032. Lerner e Sadovsky (1996, p.94) explicam que a numeração falada não é posicional, como o é a numeração escrita[4]. Na escrita de 232, há símbolos iguais – 2 – em posições diferentes. Na escrita com algarismos, o valor 200 do primeiro 2 é marcado pelo lugar em ele está, ordem das centenas, por isso se chama de Valor Relativo, pois é dado em relação à posição ocupada. Esse valor relativo não aparece no registro escrito do número.

Na numeração falada, ocorre outro processo. Quando dizemos *duzentos e trinta e dois* para uma criança, ela escuta três palavras diferentes. Essas palavras, valores relativos dos dígitos, estão visíveis quando se manipula as Fichas Escalonadas. Pela

4 Mais adiante, comentarei novamente sobre essa afirmação das autoras.

movimentação das fichas, quando o número estiver formado, ou seja, quando as fichas estiverem sobrepostas, alinhadas à direita, esses valores desaparecem, ficando o 2, o 3 e o outro 2. O manuseio das Fichas Escalonadas possibilita que, ao sobrepor as fichas [200], [30] e [2], apareça o número [232] e não aqueles 200302 ou 20032 que resultam das hipóteses das crianças.

5 I NÚMEROS EM PALAVRAS: BUSCAR REGULARIDADES E EXCEÇÕES

Números em Palavras é um recurso didático que criei para as aulas no curso de Pedagogia e que aprimorei para utilizar com as profissionais na Formação Continuada, inspirada nas Fichas Escalonadas. Números em Palavras é um conjunto de fichas com números escritos em palavras, enquanto que nas Fichas Escalonadas, os números estão escritos com algarismos.

Números em Palavras tem nove fichas verdes com os nomes dos algarismos, excluindo o zero; nove fichas rosas com as dezenas, de dez a noventa; nove fichas azuis com as centenas, de cem a novecentos e uma ficha amarela com a palavra mil. Destaco o uso das mesmas cores das Fichas Escalonadas.

O material Números em Palavras com a ficha [MIL] possibilita a produção de números maiores, consolidando os conhecimentos estudados com os números de até 3 ordens. Esse recurso didático permite exercitar a leitura de números que têm a classe dos milhares, tratando as complexidades que trazem.

A atividade com o recurso didático Números em Palavras repetia a solicitação de produzir números, mas com diferenças:

> *Escolha 3 fichas (uma de cada cor: verde, rosa e azul) e, sempre utilizando a ficha amarela* [MIL]*, produza o máximo de números possíveis.*
>
> *Escreva-os com algarismos.*

Escolhendo as fichas [NOVE], [QUINHENTOS], [OITENTA] e [MIL], o primeiro movimento das participantes foi produzir números iniciando com [MIL], por exemplo: [MIL] [NOVE] (1.009), [MIL] [QUINHENTOS] [NOVE] (1.509), [MIL] [QUINHENTOS] [OITENTA] [NOVE] (1.589), entre outros e deram por encerrada a resposta. Após os grupos listarem seus números produzidos, foi necessária uma provocação minha para pensarem outras composições ainda possíveis, realizando outros movimentos com as fichas. Então, passaram a pensar em outras combinações, colocando fichas antes e depois do [MIL], como: [NOVE] [MIL] [QUINHENTOS] (9.500), [OITENTA] [MIL] [QUINHENTOS] [NOVE] (80.509), entre muitos outros.

O manuseio do recurso didático Números em Palavras não permite a movimentação livre das fichas, como acontece com os Dígitos Móveis. Ou escrevendo de outro modo:

manusear livremente os Números em Palavras pode produzir leituras não convencionais ou leituras que podem parecer sem sentido. A ficha NOVE, por exemplo, colocada à esquerda da ficha OITENTA gera a leitura '*nove oitenta*'. E como se escreve com algarismos esse '*nove oitenta*'? Assim, 980? E quando juntamos as fichas NOVECENTOS e OITENTA, que número produzimos? É o mesmo 980? É possível combinar fichas diferentes e produzir um mesmo número?

Números em Palavras é um recurso fecundo para pensar as questões anteriores, analisando situações cotidianas, nas quais os números podem ter outros modos de ler, sem prejuízo à comunicação. Por exemplo, numa situação em que os números são utilizados para identificar casas, podemos escutar a frase "Moro no edifício nove oitenta da rua Olavo Bilac", sem estranheza, compreendendo bem que se trata do número *novecentos e oitenta* (980). Numa situação em que os números desempenham a função de quantificar, é incomum dizer "Minha cidade fica a *nove oitenta* quilômetros longe daqui". O número *nove oitenta* parece ficar sem sentido. Para quantificar, tanto quantidades discretas quanto quantidades contínuas, como é o caso do exemplo, o comum é apresentar o modo formal, *novecentos e oitenta*. Assim, este recurso manipulativo permite estudar tanto a leitura convencional – mais exigida nos ambientes escolares – como a leitura com traços culturais, aquela que vai sendo apreendida na vida social, cultural e familiar (OLIVEIRA, 2004).

Voltando para os aspectos matemáticos convencionais da leitura do número ou, como Lerner e Sadovsky escrevem (1996), da numeração falada, o recurso didático Números em Palavras possui em suas fichas vocábulos usados para se dizer ou se ler uma quantidade numérica. Esses vocábulos são os valores relativos que os dígitos assumem dentro de números, os quais, repito, dependem da posição. As autoras citadas, como mencionei acima, afirmam que a numeração falada não é posicional, ao compará-la com a numeração escrita.

O Sistema de Numeração Decimal é posicional e, por isso, muito econômico. É posicional pois um dígito quando muda de posição, seu valor dentro do número também se altera. É econômico, pois com apenas 10 dígitos podemos escrever infinitos números. Na numeração escrita, em 427 e 274, o mesmo dígito 2 tem valores diferentes, pois está em posições distintas dentro dos números. Na numeração falada o processo é outro e são necessárias duas palavras para ler esse mesmo dígito: *vinte* e *duzentos*, respectivamente. E como já vimos na seção 3, com os algarismos 2, 4 e 7, podemos escrever 6 números diferentes com três dígitos. Na numeração falada, para dizer esses mesmos 6 números precisamos de 9 palavras. Ou seja, a não posicionalidade exige uma quantidade maior de símbolos (as palavras) para a leitura dos números.

No entanto, quero examinar com mais acuidade a movimentação das fichas do Números em Palavras. Para números com duas classes, na numeração falada, retratada pelo recurso didático aqui analisado, ocorre situação parecida com a numeração escrita, isto é, quando trocamos as palavras de lugar, produzem-se números diferentes. Mas sublinho,

que isso só ocorre movimentando as fichas para antes ou depois da ficha MIL.Vejamos: NOVE MIL (9.000) e MIL NOVE (1.009) ou OITENTA MIL QUINHENTOS (80.500) e QUINHENTOS MIL OITENTA (500.080).

Este recurso também possibilita pensar regularidades e exceções tanto na leitura, como na escrita por extenso dos números. As regularidades aparecem nas palavras que nomeiam os números entre 10 e 20 (onze – doze – treze – ... – dezenove): há sempre a presença de um Z nelas. As exceções estão na dezena *vinte* e na centena *quinhentos,* que não se assemelham a *dois* e *cinco* como *quarenta* e *quatrocentos* se assemelham a 4, por exemplo. Ainda pode-se pensar e aprender sobre quando se usa CEM ou quando se usa CENTO[5] na leitura de um número.

6 I REFLEXÕES FINAIS

Até aqui, mostrei os recursos didáticos manipulativos e as aprendizagens que mobilizam, os raciocínios que geram, a partir de uma solicitação – produzir números – que, ao mesmo tempo em que se repetia, trazia algo de desafiante, de estimulador. Esses números produzidos não estavam inseridos em situações cotidianas, não estavam contextualizados em realidades socioculturais, as quais trazem e fazem-nos pensar em suas diferentes leituras, escritas, significados e outros símbolos que os acompanham (OLIVEIRA, 2008), a exceto do momento em que as respostas das crianças exigem que se amplie explicações, como apresentei em relação às funções dos números. Nos recursos didáticos apresentados, os números estavam contextualizados na sequência numérica, no conjunto dos Naturais, para focar melhor a compreensão cada vez mais consistente das complexidades do Sistema de Numeração Decimal.

Na avaliação dos trabalhos, uma professora escreveu: “A oficina ajudou a levar para nossas escolas atividades mais práticas e significativas, *saindo das atividades cotidianas no caderno*”. Outra participante registrou: a oficina “acrescentou, ampliou, trouxe outras possibilidades de trabalho com os números que utilizam materiais simples, fáceis, *longe do tradicional registro no caderno*”. Um segundo objetivo do trabalho com as/os participantes foi praticar a invenção de atividades que, ao mesmo tempo, aproveitassem os números produzidos com os recursos didáticos e explorassem, continuassem provocando o pensamento numérico das crianças, principalmente com atividades escritas nos cadernos.

Sabemos que há um gosto por parte de profissionais, principalmente as que trabalham com os Anos Iniciais da Educação Básica, em relação a atividades práticas, lúdicas, e que “justificam a opção pela utilização de materiais concretos como um fator de motivação, tornando as aulas mais alegres, para que os alunos passem a gostar da matéria”, segundo Oliveira e Passos (2008, p.319) escrevem. Os recursos didáticos cumpriram esse papel de

Muitas dessas atividades podem ser feitas também através do “tradicional registro

5 Motivada por esta singularidade, a ficha foi confeccionada com as duas palavras CEM e CENTO, uma na frente, outra no verso.

no caderno", configurando um momento de reflexão e de escrita individual, um momento de concentração, de pensar mais focado, de convergir hipóteses para um mesmo objeto de aprendizagem. Considero importante momentos coletivos e lúdicos nos tempos escolares dos Anos Iniciais. No entanto, planejar momentos individuais de reflexão são necessários para sistematizar, consolidar e acompanhar os conhecimentos compreendidos pelas crianças, assim como para indicar a pertinência de novas atividades.

Assim, como ilustrei no uso do Varal Numérico, é possível e considero desejável, realizar outras atividades com as produções da turma, em momentos individuais, no caderno. Relaciono algumas: ordenar e comparar números; escrever antecessor e sucessor; escrever os números com palavras ou com algarismos; escolher dois números próximos e completar a sequência entre eles; escrever números entre outros dois; a partir de um número escolhido, contar de 10 em 10 ou de 2 em 2, para frente ou para trás; escrever dois números maiores e dois, menores ou escrever/dizer os 3 seguintes/anteriores; entre muitas outras possibilidades.

Outra participante avaliou: "Aprendi possibilidades que eu não pensava em trabalhar com a matemática. Adorei. Vou reproduzir na prática diária da escola e vou criar mais." "... Reproduzir na prática diária da escola ..." não era bem o que eu esperava como efeito da oficina. "... Criar mais", sim. O objetivo da oficina era compreender, inspirar-se, adaptar, pensar outras ações didáticas a partir da produção de números com os recursos didáticos apresentados. O almejado era que, após a vivência da oficina, cada profissional pudesse ter os conhecimentos necessários, tanto didáticos, quanto matemáticos, para criar mais!

REFERÊNCIAS

ARAGÃO, Heliete M.C.A; VIDIGAL, Sonia M.P. **Materiais Manipulativos para o Ensino do Sistema de Numeração Decimal.** São Paulo: Edições Mathema, 2012. (Coleção Mathemoteca. Orgs.: SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria Ignez).

BRASIL, MEC/Secretaria da Educação Básica. **PNAIC: Construção do Sistema de Numeração Decimal** – Caderno 3. Brasília: MEC/SEB, 2014.

CARRAHER, Terezinha N. O desenvolvimento mental e o sistema numérico decimal. In: CARRAHER, Terezinha N. (Org.) **Aprender Pensando: Contribuições da Psicologia Cognitiva para a Educação**. Petrópolis: Vozes, 1986. p.51-68.

LERNER, Delia; SADOVSKY, Patricia. O sistema de numeração: um problema didático. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (Orgs.). **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996. p.73-111.

OLIVEIRA, Helena D. L. de. Os números e seus arredores: escritas, significados, leituras, contextos. In: ÁVILA, Ivany S. (Org.). **Mitos e ritos em sala de aula: Um olhar pelo avesso do avesso**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2008. p.107-116.

OLIVEIRA, Rosa M. M. A.; PASSOS, Cármen L. B. Promovendo o desenvolvimento profissional na formação de professores: a produção de histórias infantis com conteúdo matemático. In: **Ciência & Educação**, v.14, n.2, p.315-330, 2008.

CAPÍTULO 9

NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) 190 ANOS DEPOIS

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 04/01/2021

Dayson Wesley Lima Castro
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/0573719131238299

Arilson da Conceição Rocha
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/5577218622052983

Natanael Freitas Cabral
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
0000-0002-9177-4977

Miguel Chaquiam
Universidade do Estado do Pará
Belém – Pará
0000-0003-1308-8710

RESUMO: A partir de exposições a respeito do ensino de Matemática, nas quais são abordadas a necessidade de superação dos modelos tradicionalmente exercidos em sala com a inclusão metodologias e recursos alternativos, este trabalho tem por objetivo apresentar um texto fundamentado na biografia de Niels Henrik Abel, de modo a destacar suas contribuições científicas **à** Matemática e que também possa ser utilizado na formação inicial ou continuada de professores de matemática. Considera-se que a inclusão de aspectos históricos no ensino de Matemática pode favorecer a desmistificação de que esta disciplina é imutável, quando na verdade os argumentos matemáticos podem ser questionados e também sofrer modificações em decorrência do desenvolvimento de conteúdos matemáticos, fatos que podem ser caracterizados ao longo de sua construção histórica. Assim, destaca-se o recurso da biografia como uma alternativa na qual é possível observar e destacar as contribuições e equívocos relacionados a um personagem específico, visto que a instrumentalidade educativa da biografia favorece a troca de experiências individuais e coletivas. Para tanto, este trabalho foi assentado em bases metodológicas qualitativa por meio de uma pesquisa bibliográfica de cunho histórico, na qual buscou-se traços biográficos de Niels Henrik Abel e suas contribuições à Matemática em livros, sites e trabalhos acadêmicos. Os caminhos percorridos e a escrita deste texto evidenciaram que os estudos de Niels Henrik Abel trouxeram novas perspectivas nas áreas as quais centraram suas pesquisas, dentre elas, as equações algébricas de grau cinco ou superior e a teoria das funções elípticas.

PALAVRAS - CHAVE: História da Matemática. Biografia. Niels Henrik Abel. Ensino de Matemática. Funções Elípticas.

NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) 190 YEARS LATER

ABSTRACT: Based on exhibitions about the teaching of Mathematics, in which the need to overcome the models traditionally exercised in the classroom with the inclusion of alternative

methodologies and resources is addressed, this work aims to present a text based on the biography of Niels Henrik Abel in order to highlight its scientific contributions to Mathematics and that it can also be used in the initial or continuing education of mathematics teachers. It is considered that the inclusion of historical aspects in the teaching of Mathematics may favor the demystification that this discipline is immutable, when in fact the mathematical arguments can be questioned and also undergo changes due to the development of mathematical content, facts that can be characterized throughout its historic construction. Thus, the feature of biography stands out as an alternative in which it is possible to observe and highlight the contributions and misconceptions related to a specific character, since the educational instrumentality of biography favors the exchange of individual and collective experiences. To this end, this work was based on qualitative methodological bases through a bibliographic research of a historical nature, in which biographical traces of Niels Henrik Abel and his contributions to Mathematics were sought in books, websites and academic works. The paths taken and the writing of this text showed that the studies of Niels Henrik Abel brought new perspectives in the areas in which he focused his research, among them, the algebraic equations of grade five or higher and the theory of elliptic functions.
KEYWORDS: History of Mathematics. Biography. Niels Henrik Abel. Mathematics teaching. Elliptical Functions.

1 I INTRODUÇÃO

As discussões inerentes ao ensino são corriqueiramente abordadas por pesquisadores em Educação Matemática, nas quais buscam encontrar soluções para as dificuldades de aprendizagem dos conteúdos e melhorar a transmissão do conhecimento matemático entre o professor e os alunos. Estas discussões acarretam uma visão reflexiva para as metodologias de ensino que são empregadas em sala de aula, possibilitando um vasto repositório de alternativas didáticas que podem ser aplicadas no ambiente escolar.

Entre tantas abordagens de ensino que já foram estudadas e fundamentadas, salienta-se as Tendências da Educação Matemática que possibilitam novas perspectivas para a prática dos professores de Matemática com atividades desvinculadas ao modelo tradicional de ensino expositivo, propiciando uma maior integração e interação dos alunos com os objetos matemáticos estudados.

Entre estas novas abordagens de ensino, destacou-se a História da Matemática como um recurso didático que pode favorecer o processo de ensino-aprendizagem desta disciplina. Este recurso tem se configurado uma ferramenta de contribuição na potencialização da aprendizagem dos conteúdos matemáticos pois permite a criação de um pensamento crítico da construção histórica da Matemática. Nesse sentido, Mendes e Chaquiam (2016) corroboram quando afirmam que:

> Pesquisas atuais indicam que a inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de

> soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e procedimentos matemáticos do passado e do presente. (MENDES e CHAQUIAM, 2016, p. 79)

Por meio desta consideração, enxergamos que a introdução dos fatos históricos nas aulas pode permitir um melhor entendimento do conteúdo a ser abordado em sala desmistificando que a Matemática é uma disciplina que possui como característica a memorização de fórmulas e procedimentos de resolução pré-estabelecidos. Analisando o uso da história da matemática, Chaquiam (2017) aponta que

> (...) na introdução de elementos históricos na sala de aula por meio dos textos originais ou de biografias de matemáticos ilustres estamos fazendo uma abordagem direta da história da matemática em sala de aula. Nesse tipo de abordagem a descoberta dos conceitos é apresentada em toda sua extensão e a legitimação para seu uso é baseada nas possibilidades de aumentar o interesse dos alunos e motivá-los para o estudo da Matemática. (CHAQUIAM, 2017, p. 17)

Com isto, consideramos que a biografia e as contribuições dos personagens históricos que consolidaram os fundamentos dos conteúdos matemáticos podem fortificar a Matemática como uma construção humana.

Das discussões em torno da importância das biografias para o ensino, Carino (1999) aborda que

> A importância específica da biografia como instrumento educativo parece óbvia, pois é nos exemplos de vivências humanas reais que a educação vai buscar os modelos com os quais procura forjar a imagem de homem a ser formado pela educação. Porém, filosoficamente falando, o óbvio não pode ser ponto de chegada, mas de partida. Além de constatar a instrumentalidade educativa explícita na maioria das biografias, é necessário ir além, procurando desvendar as motivações por detrás dessa utilização dos relatos de vida. É preciso resgatar a importância da individuação, porém, sem a ingenuidade isolacionista. O cruzamento entre a apropriação individual do mundo e a recorrência das conexões comuns à coletividade humana é o lócus da inteligibilidade acerca da relação entre o uno e o múltiplo, entre o ser individual e o ser social. (CARINO, 1999, p. 178)

Nesse sentido, a utilização de biografias nas aulas de Matemática pode favorecer com que os alunos percebam que os antigos cientistas também obtiveram suas dificuldades para a formulação de suas teorias, além de compreenderem a evolução histórica na qual o conteúdo matemático desenvolvido pelo matemático perpassou por modificações ou complementações em relação ao seu conceito de origem. Assim sendo, o aluno pode fazer diferentes representações dos conceitos matemáticos até que haja bases teóricas suficientes para que o professor formalize na linguagem formal da disciplina.

Destacamos com isto, a história de Niels Henrik Abel, um matemático nascido na Noruega e que em pouco tempo de vida trouxe grandes contribuições para a Matemática

e áreas afins. Apesar de em sua terra natal não receber o reconhecimento devido a seus estudos, não conseguiu tornar-se professor de nenhuma universidade, mas seus trabalhos se tornaram notáveis em teoremas e teorias que atualmente levam seu nome. Além do mais, um matemático francês chamado Charles Hermite (1822-1901) declarou que “Ele deixou material para que os matemáticos se ocupem por quinhentos anos”, como forma de admiração às contribuições de Abel (EVES, 2004, p. 534).

A partir destas considerações iniciais e para nortear o desenvolvimento da pesquisa bibliográfica de abordagem qualitativa que gerou este trabalho, ficou estabelecido como objetivo elaborar um texto fundamentado na biografia de Niels Henrik Abel, de modo a destacar suas contribuições científicas para a Matemática e que este possa ser utilizado na formação inicial ou continuada de professores de matemática.

2 | TRAÇOS BIOGRÁFICOS DE NIELS HENRIK ABEL

Niels Henrik Abel foi um matemático norueguês que nasceu em 5 de agosto de 1802, período no qual seu país passou por problemas políticos e econômicos em virtude das guerras comandas por Napoleão Bonaparte entre a transição dos séculos XVIII e XIX na Europa. Nesta época a Noruega se constituía parte do território dinamarquês, e este país saiu derrotado em uma batalha no porto de Copenhague pelas tropas britânicas em 1807. A partir desta derrota, tanto a Dinamarca quanto a Noruega sofreram bloqueios econômicos impedindo a exportação de madeira e a importação de grãos que geraram uma forte crise nestes países.



Figura 1: Retrato e assinatura de Niels Henrik Abel.

Fonte: https://archive.org/details/nielshenrikabelt00bjer/page/n7/mode/2up (2019).

Abel cresceu em um país em meio à fome e extrema pobreza, além de possuir muitos problemas familiares pois, segundo O'connor e Robertson (1998), seu pai, Sören Georg Abel, era um homem que investia suas finanças em bebidas e sua mãe, Ane Marie Simonson, foi acusada de ter uma moral negligente. O pai de Abel era formado em teologia e filologia, além de possuir um espírito nacionalista o qual o fez atuar ativamente pelo movimento de independência da Noruega pois trabalhava em um órgão legislativo.

Acerca da educação de Abel, até os trezes anos de idade ele foi educado pelo seu pai na paróquia onde foi nomeado ministro após a morte do avô de Abel. Em 1815, Abel e seu irmão mais velho foram enviados para a Escola da Catedral situada em Christiania, atual cidade de Oslo, de onde também se fundou a Universidade de Christiania, em 1813, com a retirada de bons professores da escola para atuar nesta instituição. Na escola, Abel se mostrou um aluno comum com uma certa facilidade para Matemática e Física. No entanto, em 1817 com a entrada de um novo professor chamado Bernt Holmboë, Abel começa a sentir-se atraído pelas obras de grandes matemáticos.

Nas aulas de Holmboë, Abel começou a ter contato direto com as obras de Leonard Euler, Isaac Newton, d'Alembert, Lagrange e Laplace que fizeram com que ele se destacasse entre os demais alunos. A admiração de Holmboë pela dedicação de Abel possibilitou garantir uma bolsa de estudos ao jovem matemático para permanecer na escola após a morte de seu pai em 1820, tal ato permitiu com que Abel estudasse o problema da solução da equação de quinto grau e chegasse a uma possível fórmula de solução. No entanto, após orientações do matemático dinamarquês Ferdinand Degen, Abel tentou fazer uma aplicação de sua fórmula em um exemplo e percebeu que seu método não estava correto.

Ao ingressar na Universidade de Christiania em 1821, Abel conseguiu apoio financeiro de um professor de Astronomia chamado Christopher Hansteen. A partir de 1823, Abel começou a fazer suas publicações em um jornal científico organizado por Hansteen, as primeiras retratavam sobre equações funcionais e integrais. Neste mesmo ano, Abel começou a fazer suas viagens para se encontrar com matemáticos para trocar informações sobre suas descobertas. Por meio destas viagens, Abel retoma o problema das equações de grau cinco ou superior demonstrando a impossibilidade de uma expressão geral.

A partir da afinidade que Abel foi adquirindo com outros matemáticos em suas viagens por Copenhague, Berlim, Paris e entre outras cidades europeias, suas produções científicas foram alcançando mais relevância científica. Suas contribuições foram memoráveis à Matemática, que após a morte de Abel oriunda de Tuberculose em 6 de abril de 1829 com 26 anos de idade, a Academia Francesa de Ciências concedeu ao seu nome o *Grand Prix* pelos seus feitos.

Observando as significativas contribuições de Niels Henrik Abel para a Matemática, a seguir destacamos algumas obras de sua autoria ressaltando a relevância científica de cada uma delas.

3 | A PRODUÇÃO CIENTÍFICA DE NIELS HENRIK ABEL

Em *Oplasning ofet Par Opgaver ved bjoelp af bestemte Integraler* (Soluções de alguns problemas por meio de integrais definidas), Abel conseguiu a primeira solução para uma equação integral, um estudo muito importante para a História da Matemática, mas que segundo Gillispie (2007), esse trabalho não teve tanta relevância **à** comunidade científica pois foi escrito em norueguês. Neste trabalho Abel tratou de um problema mecânico acerca do movimento de um ponto de massa em uma curva analisando a influência da gravidade. Abel escreveu um artigo mais detalhado sobre a integração das expressões funcionais, no entanto este manuscrito desapareceu na Universidade de Christiania, e acreditasse que alguns resultados apareceram em trabalhos posteriores a este.

Ao escrever sobre a impossibilidade da solução por meio de radicais das equações de grau cinco ou superior, Abel teve que publicar por conta própria com recursos escassos *Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la resolution de l'équation générale du cinquième degré* (Dissertação sobre as equações algébricas onde se demonstra a impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau). Esta foi a primeira tentativa de divulgação deste resultado, no entanto, mau sucedida visto que nenhum matemático reagiu à publicação.

Posteriormente, em suas viagens pela Europa e as contribuições de alguns amigos matemáticos, Abel detalha com mais consistência o resultado da impossibilidade de resolução de equações quínticas ou superiores e publica um artigo no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Revista de Matemática Pura e Aplicada)[1]. Com isto, Abel desenvolveu bases algébricas importantes para a discussão das extensões do estudo dos Grupos e dos Corpos. Referente ao estudo dos Grupos em que por definição um grupo G é um conjunto munido de uma operação "*", denotado pela configuração (G,*), que satisfaz três propriedades fundamentais:

I. Associatividade: $(a * b) * c = a * (b * c)$, para quaisquer a, b e $c \in G$;

II. Elemento neutro: $g * h = h * g = g$, em que g e $h \in G$;

III. Inverso: $g * g' = g' * g = 1$, com g e $g' \in G$;

E ainda,

IV. Comutatividade: $a = b = b * a$, para todo a e $b \in G$.

Grupos que satisfazem a quarta propriedade acima são comumente chamados de grupos comutativos ou abelianos em referência aos estudos de Abel nesta área.

1 Também conhecido como *Journal de Crelle* (Jornal de Crelle) em referência a seu criador August Leopold Crelle (1780-1855), matemático alemão que obteve uma restrita amizade com Abel e grande admiração pelos seus trabalhos. Fundado em 1826, cuja primeira edição conteve sete artigos de Abel e se tornou referência na comunidade matemática internacional do século XIX.

Em um trabalho posterior retratando de equações resolvíveis por radicais, Abel reconheceu que o único matemático que tentou mostrar a impossibilidade de solução das equações gerais foi o italiano Paolo Ruffini (1765-1822), que publicou um artigo sobre o tema, mas que não apresentava provas compreensíveis e satisfatórias (KATZ, 2010, p. 858). Esse resultado é conhecido como Teorema de Abel-Ruffini que, segundo Carneiro (2018), diz que “não existem fórmulas resolutivas gerais que determinem corretamente as soluções de uma equação algébrica de grau 5 ou maior” (p. 15). Este teorema fundamentou o aprofundamento dos estudos de Évariste Galois (1811-1832) acerca das especificações de sua aplicação desenvolvendo a Teoria dos Grupos também chamada de Teoria de Galois, na qual estabeleceu conexões entre o estudo dos Grupos e a solubilidade das equações algébricas.

Ao perceber que outro jovem matemático chamado Karl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) anunciou alguns resultados referentes à teoria da transformação de integrais elípticas em uma revista de Astronomia, Abel escreveu uma série de artigos sobre este assunto e alegou que os resultados de Jacobi surgiram de seus próprios resultados. A partir desta disputa intelectual, Abel publicou *Solution d’um problème general concernant la transformation des fonctions elliptiques* (Solução de um problema geral sobre a transformação de funções elípticas) como uma resposta ao trabalho de Jacobi. Posteriormente, preparou um artigo intitulado *Précis d’une théorie des fonctions elliptiques* (Compêndio de uma teoria de funções elípticas) que foi publicado após sua morte; além de um livro cujo tema foi *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* (Fundamentos da nova teoria de funções elípticas). Com estes trabalhos, Abel expandiu os estudos sobre as funções elípticas.

Em decorrência da limitação de páginas para esta pesquisa restringimos os comentários sobre as obras de Abel e indicamos o livro *Oeuvres Complètes de Niels Henrik Abel* (Obras Completas de Niels Henrik Abel)[2] a quem desejar outras informações dos trabalhos deste matemático.

2 O livro não apresenta uma versão em língua portuguesa e sua versão online no Google Acadêmico encontra-se de forma parcial. Sumariamente no livro consta todos os trabalhos de Abel de forma integral apresentando uma riqueza de detalhes aos escritos originais do autor.

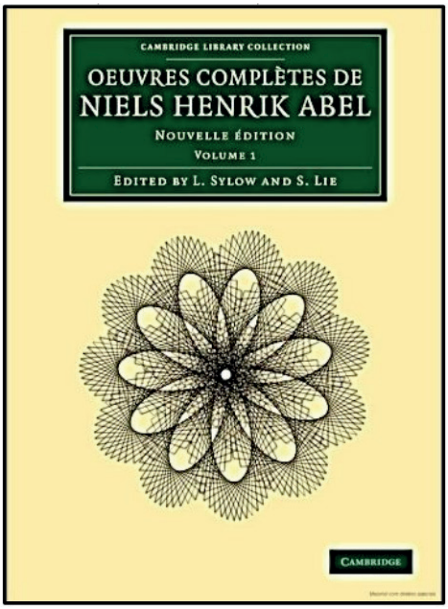


FIGURA 2: Capa do livro *Obras Completas de Niels Henrik Abel*.

Fonte: https://scholar.google.com.br (2018).

Observando as diversas contribuições à Matemática levantadas anteriormente, a seguir retratamos alguns desdobramentos do estudo das funções elípticas as quais originaram-se por meio dos estudos de Abel.

4 | AS FUNÇÕES ELÍPTICAS SEGUNDO ABEL E APLICAÇÕES ATUAIS

Conforme a discussão feita na sessão anterior, percebemos que o estudo das funções elípticas obteve um grande salto por meio dos estudos de Abel em uma corrida acadêmica com Jacobi, mesmo que alguns pressupostos indicam que Gauss já havia descoberto alguns princípios das funções elípticas. O desenvolvimento matemático nesta área com as pesquisas destes personagens, credita-os como os propulsores deste campo de pesquisa.

A partir dos estudos de Abel, as funções elípticas se tornaram uma vasta e natural generalização das funções trigonométricas, o que se constituiu um ramo de pesquisa bastante explorado no século XIX. As pesquisas de Abel sobre as funções elípticas permitiram apresentar esta teoria com grande riqueza de detalhes, visto que incluiu explicações sobre periodicidade dupla, expansões em séries infinitas, produtos e somas em forma de teoremas.

O primeiro relato sobre os estudos de Abel acerca das funções elípticas, registra-se em 1826, em um encontro com Adrien Marie Legendre (1752-1833), matemático que tinha

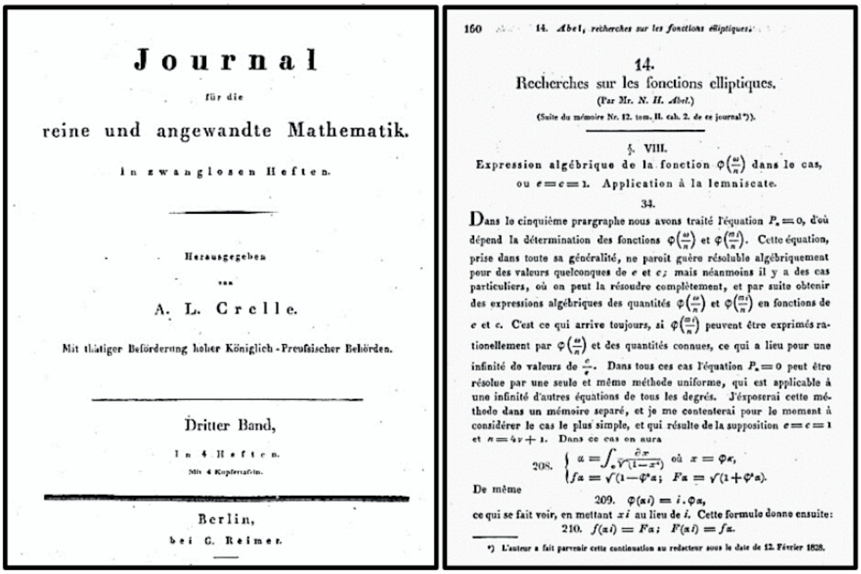
muito interesse nesta área de pesquisa e surpreendeu-se com os dotes matemáticos de Abel (GILLISPIE, 2007, p. 40). A partir deste encontro, Abel preparou um artigo para ser apresentado na Academia Francesa de Ciências sobre as funções elípticas incluindo teoria e aplicações.

Este trabalho apresentado intitulou-se *Mémoire sur une proprieté générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes* (Dissertação sobre uma propriedade geral de uma classe muito conhecida de funções transcendentes) no qual teve como avaliadores Legendre e Cauchy (1789-1857). O relatório no qual apontava o resultado deste trabalho de Abel não foi estabelecido pois o segundo avaliador considerou que o manuscrito estava ilegível, mas que não o desanimou a prosseguir suas pesquisas, com isto o documento só foi divulgado após a morte de Abel.

Após a notável injustiça de Cauchy a respeito do trabalho de Abel apresentado na Academia Francesa de Ciências, Abel trabalhou com assiduidade no artigo *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Pesquisas sobre as funções elípticas), cuja a primeira folha deste artigo está ilustrado na Figura 3, publicado num periódico alemão de matemática, capítulo 14, em 1828.

Ao publicar este artigo, Abel inovou radicalmente a teoria das integrais elípticas a renomeando para a teoria das funções elípticas. Este trabalho tornou-se referência junto aos matemáticos da sua época, visto que em uma nova perspectiva, as funções elípticas se configuraram uma vasta e natural generalização das funções trigonométricas.

Desde o primeiro trabalho sobre as funções elípticas, orientado por Legendre, Abel desenvolveu o que é considerado por alguns matemáticos sua obra-prima: o conhecido Teorema de Abel. Esse teorema determina que "qualquer soma pode ser expressa como um número fixo ***p*** de integrais de uma dada função algébrica, com integrandos que são funções algébricas dos argumentos originais". Este número ***p*** é denominado como o gênero da função. Nesse sentido, o Teorema de Abel é uma generalização da relação de Euler nas integrais elípticas.



Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Dritter Band,

In 4 Heften.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin,

bei G. Reimer.

160 14. *Abel, recherches sur les fonctions elliptiques.*

14.

Recherches sur les fonctions elliptiques.

(Par Mr. *N. H. Abel.*)

(Suite du mémoire Nr. 12. tom. II. cah. 2. de ce journal*)).

§. VIII.

Expression algébrique de la fonction $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ dans le cas, ou $e=c=1$. Application à la lemniscate.

34.

Dans le cinquième prargraphe nous avons traité l'équation $P_n=0$, d'où dépend la détermination des fonctions $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$. Cette équation, prise dans toute sa généralité, ne paroit guère résoluble algébriquement pour des valeurs quelconques de e et c; mais néanmoins il y a des cas particuliers, où on peut la résoudre complètement, et par suite obtenir des expressions algébriques des quantités $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ en fonctions de e et c. C'est ce qui arrive toujours, si $\varphi\left(\frac{\varpi i}{n}\right)$ peuvent être exprimés rationellement par $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ et des quantités connues, ce qui a lieu pour une infinité de valeurs de $\frac{c}{e}$. Dans tous ces cas l'équation $P_n=0$ peut être résolue par une seule et même méthode uniforme, qui est applicable à une infinité d'autres équations de tous les degrés. J'exposerai cette méthode dans un mémoire separé, et je me contenterai pour le moment à considérer le cas le plus simple, et qui résulte de la supposition $e=c=1$ et $n=4\nu+1$. Dans ce cas on aura

$$208.\quad \begin{cases} \alpha = \int_0 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} \quad \text{où } x = \varphi\alpha, \\ f\alpha = \sqrt{(1-\varphi^2\alpha)}; \quad F\alpha = \sqrt{(1+\varphi^2\alpha)}. \end{cases}$$

De même

$$209.\quad \varphi(\alpha i) = i.\varphi\alpha,$$

ce qui se fait voir, en mettant xi au lieu de i. Cette formule donne ensuite:

$$210.\quad f(\alpha i) = F\alpha; \quad F(\alpha i) = f\alpha.$$

*) L'auteur a fait parvenir cette continuation au redacteur sous la date de 12. Février 1828.

FIGURA 3: Capa do periódico e artigo *Recherches sur les fonctions elliptiques* de Abel.

Fonte: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/ (2019).

Segundo Gillispie (2007, p. 41), em uma reunião na Academia Francesa em 1827, Legendre elogiou Abel e Jacobi pelos seus estudos que elevaram o estudo das funções elípticas a um patamar elevado para matemáticos tão jovens. Apesar disto, Jacobi admitiu que se fundamentou nos resultados de Abel para progredir em suas pesquisas, o que deixou Legendre decepcionado. No entanto, não há como negar que as bases matemáticas para as funções elípticas foram fortemente alicerçadas com as pesquisas destes dois matemáticos.

Analisando o estudo inicial das funções elípticas, Bérgamo (2018) salienta que

> Legendre apresentou importantes resultados neste ramo da matemática, como a obra *Exercises du Calcul Intégral*, que reúne propriedades básicas e tabelas das integrais elípticas.
>
> Apesar de suas notáveis contribuições, foram os trabalhos de Niels Henrik Abel (1802-1829) e Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) que ganharam notoriedade. Além de considerar as funções inversas das integrais elípticas, as quais chamados hoje de funções elípticas, Abel publicou uma teoria estabelecendo uma analogia com a teoria das funções trigonométricas. Já Jacobi foi responsável por introduzir a função seno da amplitude de *u* (atualmente, adotamos sn *u*) e foi quem provou a dupla periodicidade das funções elípticas.

> Tanto os trabalhos de Abel como os de Jacobi foram fundamentais para o desenvolvimento da teoria das funções elípticas, que durante o século XIX, se constituiu numa das áreas de pesquisa mais importantes da matemática, e que, ainda hoje, continua tendo a sua relevância no ramo das ciências exatas. (BÉRGAMO, 2018, p. 20)

A partir dos estudos de Legendre, Abel e Jacobi, as funções elípticas tomaram novas perspectivas as quais ainda obtêm sua relevância à comunidade científica atual. Conforme indicado por Simão (2013), uma função elíptica, por definição, segue a expressão integral:

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt{P(x)}}\, dx \, ,$$

em que $\mathrm{F}(x)$ é uma função algébrica racional e $\mathrm{P}(x)$ representa um polinômio de grau três ou quatro em x. A partir desta definição formulada por Legendre, foi possível determinar três ordens para as integrais elípticas.

A integral elíptica de primeira ordem é determinada como

$$F(x,k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-k^2t^2).(1-t^2)}}\, dt \, ,$$

a de segunda ordem é definida por

$$E(x,k) = \int_0^x \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-k^2t^2).(1-t^2)}}\, dt \, ,$$

e a de terceira ordem define-se por

$$\Pi(x,n,k) = \int_0^x \frac{1}{(1+nt^2).\sqrt{(1-k^2t^2).(1-t^2)}}\, dt \, ,$$

com o parâmetro real ***k*** variando entre 0 e 1 nos três casos.

Estas integrais favoreceram os estudos de Abel e Jacobi para o aprofundamento do estudo das funções elípticas, além de que essas três formas de integrais são também conhecidas como formas canônicas.

Atualmente, as aplicações das funções elípticas são comumente relacionadas entre os campos científicos da Matemática e da Física. **Bérgamo** (2018) utilizou as funções elípticas como uma aplicação à resolução aos sistemas periódicos de mecânica, como o pêndulo simples e o peão simétrico. O primeiro destes foi gerado a partir das chamadas Funções Elípticas de Jacobi, o qual teve como fundamentação os trabalhos de Abel, assim observando a velocidade e o ângulo do pêndulo fazem com que o mesmo se comporte de modo análogo a um oscilador harmônico simples, que graficamente é descrito for funções trigonométricas também estudadas por Abel.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Compreender que o ambiente educacional necessita de novas abordagens metodológicas de ensino, bem como adoção de recursos didáticos, é uma atitude que deve ser tomada pelos atuais e futuros professores de Matemática. A inclusão da História desta disciplina no ensino de conteúdos matemáticos ainda aparenta ser uma tarefa de difícil realização nas salas de aula por não haver parâmetros acerca de seu uso como recurso didático e benefícios.

Escrever um conciso relato da biografia e dos trabalhos científicos de Abel relacionados à Matemática não foi uma atividade simples, mas trabalhosa por não haver tantas fontes disponíveis a respeito do assunto que sejam confiáveis. No entanto, consideramos que o objetivo de elaborar um texto fundamentado na biografia de Niels Henrik Abel, de modo a destacar suas contribuições científicas para a Matemática e que este possa ser utilizado na formação inicial ou continuada de professores de matemática, foi alcançado e que pode trazer ricas informações sobre a utilização da história em sala de aula.

Esse trabalho corrobora no sentindo de proporcionar novas perspectivas no que diz respeito ao uso da História da Matemática como recurso didático, não somente para o personagem no qual esta pesquisa foi centrada, Niels Henrik Abel, mas que possa servir de balizamento para o desenvolvimento de outras pesquisas bibliográficas acerca de outros matemáticos que ao longo dos anos se dedicaram a desvendar a beleza desta disciplina tal como a conhecemos atualmente e que está em constante desenvolvimento.

Portanto, este trabalho pode nos proporciona um olhar mais reflexivo sobre nossas práticas profissionais docentes, a convidar professores, alunos e pesquisadores buscarem compreender a construção histórica dos conteúdos matemáticos em diferentes níveis de ensino. E a partir destes desdobramentos, caracterizar a Matemática como uma ciência construída pelas ações humanas passível de erros e acertos, e vinculada como uma articulação dos problemas cotidianos.

REFERÊNCIAS

ABEL, Niels Henrik. **Obras Completas de Niels Henrik Abel**. Nova edição. Editado por L. Sylow e S. Lie. Título Original: Oeuvres Complètes de Niels Henrik Abel. Nova York: Universidade de Cambridge, 2012. Disponível em: https://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&as_sdt=0%2C5&q=Oeuvres+Compl%C3%A8tes+de+Niels+Henrik+Abel&btnG=. Acesso em: 27 dez. 2018. (Versão parcial disponível online).

ABEL, Niels Henrik. Pesquisas sobre as funções elípticas. Título original: Recherches sur les fonctions elliptiques. **Journal für die reine und angewandte Mathematik (Jornal de Matemática Pura e Aplicada)**, Göttingen (Alemanha), v.3, n. 12, p. 160-190, 1828. Disponível em: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/ges%22:[166],%22panX%22:0.415,%22panY%22:0.757,%22view%22:%22%22,%22zoom%22:0.273}. Acesso em: 3 jan. 2019.

BÉRGAMO, José Vinicius Zapte. **Teoria das funções elípticas e aplicações em soluções de sistemas periódicos de mecânica**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, UNESP, Rio Claro, 2018.

CARINO, Jonaedson. A biografia a sua instrumentalidade educativa. **Educação & Sociedade:** Revista do Centro de Estudos de Educação e Sociedade, ano 20, n. 67, p. 153-181, 1999.

CARNEIRO, Renato. **Equações algébricas:** estudos e sala de aula. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas da Universidade Federal de Ouro Preto, UFOP, Ouro Preto, 2017.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos:** história e matemática em sala de aula. Belém: SBEM/SBEM-PA, 2017.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de: Hygino H. Domingues. Título original: An Introduction to the History of Mathematics. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GILLISPIE, Charles Coulston. **Dicionário de biografias científicas**. Tradução de: Carlos Almeida Pereira. Título original: Dictionary of scientific biography. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Fundação Calouste Gulbenkian: Lisboa, 2010.

MENDES, Iran Abreu; CHAQUIAM, Miguel. **História nas aulas de Matemática:** sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

O'CONNOR, J. J.; ROBERTSON, E. F. **Niels Henrik Abel**. Saint Andrews: Escola de Matemática e Estatística da Universidade de Saint Andrews, Escócia, 1998. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Abel.html. Acesso em: 3 dez. 2018.

SIMÃO, Cleonice Salateski. **Uma introdução ao estudo das funções elípticas de Jacobi**. Dissertação (PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, UEM, Maringá, 2013.

CAPÍTULO 10

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE LAPLACE BIDIMENSIONAL ANISOTRÓPICA E O FATOR DE CONVERGÊNCIA ASSINTÓTICA

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 09/12/2020

Giovanni Santos
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, Departamenmteo de Matemática, Irati – PR
http://lattes.cnpq.br/7416106820769519

Mairon Carliel Pontarolo
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, Departamento de Matemática, Irati – PR
http://lattes.cnpq.br/3015279964475572

Sebastião Romero Franco
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, Departamenmteo de Matemática, Irati – PR
http://lattes.cnpq.br/4478097702020295

RESUMO: Neste trabalho fez-se um estudo acerca dos métodos numéricos usados para resolver equações diferenciais. Fez-se um estudo sobre problemas de valor de contorno, onde o objetivo foi resolvê-los por meio de métodos iterativos, sendo tais, Gauss-Seidele Gauss-Seidel linha. Por fim,foi resolvido numericamente a Equação de Laplace bidimensional com anisotropia. O uso desse fator de anisotropia e da ausência de fonte de calor consiste em uma das inovações e aplicabilidade deste trabalho, pois permitiu simular numericamente a condução do calor em um domínio formado por dois materiais com diferentes condutividades térmicas e calcular o fator de convergência assintótica dos suavizadores utilizados. O modelo numérico foi obtido através do emprego do Método das Diferenças Finitas, usando aproximação central de segunda ordem para a discretização. Na solução do sistema de equações resultantes utilizaram-se os *softwares Octave* e *Fortran 90*. A ausência do termo fonte permitiu explorar o comportamento do fator de convergência assintótica de cada método. Os resultados obtidos mostraram que o método de Gauss-Seidel é melhor quando o problema é isotrópico, caso contrário, o método Gauss-Seidel linha, com linha na direção do forte acoplamento apresenta resultados expressivamente melhores, corroborando com resultados descritos na literatura.

PALAVRAS - CHAVE: Condução de Calor, Método das Diferenças Finitas, Gauss-Seidel

NUMERICAL SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL ANISOTROPIC LAPLACE EQUATION AND THE ASYMPTOTIC CONVERGENCE FACTOR

ABSTRACT: In this paper, a study about the numerical methods used to solve differential equations has been carried out. A study was made on boundary value problems, where the objective was to solve them through iterative methods, such as Gauss-Seidel and line Gauss-Seidel methods. Finally, the two-dimensional Laplace equation was numerically solved with anisotropy. The use of this anisotropy factor and the absence of heat source is one of the innovations and applicability of this paper, as it allowed to simulate numerically the conduction of heat in a domain formed by two

materials with different thermal conductivities and calculate the asymptotic convergence factor of the solvers used.The numerical model was obtained using the Finite Differences Method, using a central second-order approximation for discretization. Octave and Fortran 90 software were used to solve the system of resulting equations. The absence of the term source allowed to explore the asymptotic convergence factor behavior of each method. The results obtained showed that the Gauss-Seidel method is better when the problem is isotropic, otherwise the line Gauss-Seidel method, with line in the direction of strong coupling presents significantly better results, corroborating results described in the literature.
KEYWORDS: Heat conduction, Finite Differences Method, Gauss-Seidel.

1 I INTRODUÇÃO

A equação de Laplace anisotrópica, modelo matemático considerado neste trabalho, envolve um problema bidimensional de condução de calor com fator de anisotropia e termo fonte igual a zero. Uma equação diferencial parcial (EDP) elíptica,que se aplica em escoamento de fluidos incompreensíveis e em diversos campos da ciência, como por exemplo, as Engenharias, a Astronomia e o Electromagnetismo.

Este modelo dificilmente possui uma solução analítica,sendo necessário resolvê-lo por métodos numéricos, que a partir da discretização da EDP, obtêm-se um sistema linear. A resolução desse sistema por métodos diretos exige alto custo computacional, desta forma os métodos iterativos são utilizados para aproximar a solução, como os *solver* Gauss-Seidel lexicográfico e Gauss-Seidel linha, onde internamente é usado método TDMA para resolver cada linha (SAAD, 2003).

2 I MATERIAIS E MÉTODOS

O modelo matemático usado neste trabalho é dado pela equação de Laplace 2D anisotrópica (BRIGGS et al., 2000)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \,, \tag{1}$$

onde T é a temperatura, x e y representam as coordenadas espaciais e $\varepsilon \in R_+^*$ representa o fator de anisotropia física. O domínio espacial considerado é $[0,1] \times [0,1]$.

As condições de contorno são do tipo Dirichlet

$$T(0,y) = T(x,0) = T(x,1) = T(1,y) = 0 \,. \tag{2}$$

Sob esta condição de contorno, juntamente com a ausência de fonte de calor externa, a solução analítica pode ser descrita como

$$Ta(x,y) = 0\,. \quad (3)$$

A discretização da Eq. (1) foi realizada mediante o uso do Método das Diferenças Finitas (FERZIGER; PERIC, 2002). As malhas usadas são uniformes de tamanho , com discretização central de 2ª ordem do tipo CDS, resultando em

$$\frac{T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}}{h^2} + \varepsilon\,\frac{T_{i,j-1}-2T_{i,j}+T_{i,j+1}}{h^2} = 0. \quad (4)$$

Os subíndices (i,j) representam os pontos vizinhos do ponto em que foi centrada a série de Taylor para fazer as aproximações das derivadas parciais. Para os pontos internos, essa discretização pode ser expressa por

$$\frac{2}{h^2}(1+\varepsilon)T_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left(T_{i-1,j} + T_{i+1,j}\right) + \frac{\varepsilon}{h^2}\left(T_{i,j-1} + T_{i,j+1}\right). \quad (5)$$

Estes coeficientes compõem a matriz do sistema linear que será resolvido numericamente.

3 I RESULTADOS

Os valores descritos na Tab. 1 são referentes a resolução da Eq. (5) utilizando como critério de parada uma tolerância $tol = 10^{-30}$ para o resíduo da iterada atual adimensionalizado com o resíduo inicial, ou seja, $res(it)/res(it-1)$. Nessa tabela, N representa o número de pontos da malha em ambas as direções, ou seja $N = N_x = N_y$, $\mathcal{E}$ o fator de anisotropia; it o número de iterações realizadas; p o fator de convergência assintótica; $t_{cpu}(s)$ o tempo computacional em segundos e $Solver$ é o suavizador implementados computacionalmente usando o $Fortran\,90$, em que Gauss-Seidel lexicográfico é denotado por GS_{lex}, Gauss-Seidel com linha na direção x é denotado por GS_x e Gauss-Seidel com linha na direção y é denotado por GS_y.

N	ε	$Solver$	It	ρ	$t_{cpu}(s)$
33	10^5	GS_{lex}	6701	0,9904	1,641
		GS_x	6701	0,9904	30,632
		GS_y	10	0,0010	0,043
33	10^0	GS_{lex}	6726	0,9904	1,678
		GS_x	3372	0,9809	15,188
		GS_y	3372	0,9809	15,912
33	10^{-5}	GS_{lex}	6701	0,9904	1,654
		GS_x	10	0,0010	0,056
		GS_y	6701	0,9904	30,631

Tabela 1 – Resultados das simulações numéricas considerando fatores de anisotropias distintos

O *solver* GS_y obteve os melhores resultados em número de iterações, fator de convergência e tempo computacional, para problemas anisotrópicos onde $\mathcal{E}$ assume valores grandes, ou seja, a direção de forte acoplamento. Nota-se que para problemas isotrópicos ($\mathcal{E}$ = 1), o *solver* GS_{lex}, supera os demais em tempo computacional, entretanto ambos os *solvers* apresentam semelhantes fatores de convergência assintótica. Em contrapartida, o *solver* GS_x apresenta os melhores resultados em número de iterações, fator de convergência e tempo computacional, para problemas anisotrópicos com valores pequenos para , corroborando com os resultados descritos em Thole e Trottenberg (1986), Franco (2017), Franco et al. (2018).

Utilizando como critério de parada a tolerância $tol = 10^{-30}$ foi possível analisar o fator de convergência assintótica à medida que a malha é refinada. Para isso, considerou-se $\varepsilon = 10^{-5}$ (pequeno) e o *solver* GS_x, com linha na direção do forte acoplamento. Os resultados estão descritos na Tab. 2.

N	65	129	257	513	1025	2049
it	12	16	22	38	88	267
ρ	0,0041	0,0163	0,0622	0,2099	0,5151	0,8095

Tabela 2 – Número de iterações e fator de convergência assintótica para diversas malhas, considerando $tol = 10^{-30}$, $\varepsilon = 10^{-5}$ e o *solver* GS_x

Observa-se na Tab. 2 que apesar do alto refino da malha, o *solver* GS_x conseguiu resolver o problema até alcançar a precisão desejada com um baixo número de iterações, mesmo sem o uso de métodos que aceleram a convergência. Os resultados descritos nessa tabela mostram que o *solver* GS_x perde a eficácia quando a malha é refinada, pois como $\mathcal{E}$ foi cosiderado fixo, o valor da divisão $\mathcal{E}/h^2$ presente na Eq.(5) assume valores cada

vez maiores, alterando o fator de anisotropia. Sugere-se então, neste caso, o uso de um acelerador de convergência, como por exemplo, o método *multigrid*.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foi possível ter um primeiro contato com soluções numéricas, notando a importância do fator de convergência assintótica, bem como dos *solvers* utilizados nas resoluções dos problemas. Por meio deste, também foi possível compreender a diferença entre problemas isotrópicos e anisotrópicos, uma vez que o fator de anisotropia do problema estava acoplado em uma das direções e seu valor caracteriza o coeficiente de condutividade térmica do meio estudado. O fato do termo fonte ser nulo permitiu calcular o fator de convergência assintótica para os diversos *solvers* e refinos de malhas.

REFERÊNCIAS

BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*. 2nd. ed. Philadelphia: SIAM, 2000.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3nd. ed. New York: Springer, 2002.

FRANCO, S. R. *Métodos Multigrid Espaço-Tempo para Resolver as Equações do Calor e da Poroelasticidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2017.

FRANCO, S. R.; GASPAR, F. J.; PINTO, M. A. V.; RODRIGO, C. Multigrid method based on a space-time approach with standard coarsening for parabolic problems. *Applied Mathematics and Computation*, v. 317, p. 25–34, 2018.

SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd. ed. Philadelphia: PWS, 2003.

THOLE, C.; TROTTENBERG, U. Basic smoothing procedures for the multigrid treatment of elliptic 3d operators. *Appl. Math. Comput.*, v. 333, n. 19, 1986.

CAPÍTULO 11

CONSTRUINDO E RESOLVENDO SITUAÇÕES-PROBLEMA SOBRE ESTRUTURAS ADITIVAS USANDO DIAGRAMAS DE VERGNAUD E EXCEL COM PROFESSORES DE ESCOLAS PÚBLICAS E PRIVADAS

Data de aceite: 17/02/2021

Ana Emilia de Melo Queiroz
Universidade Federal do Vale do São Francisco

RESUMO: Este estudo foi delineado para apresentar parte de um projeto de extensão que foi executado durante (04) anos de (2007-2010). Esse recorte foi relativo ao ano de 2010 durante (04) quatro encontros voltados para construção e resolução de situações-problema sobre Estruturas Aditivas usando diagramas de Veergnaud e Excel com professores de escolas publicas e privadas. Para tanto, vinte cinco (25) professores de sete (07) escolas, sendo duas (02) privadas e cinco (05) públicas construiram cinquenta e duas (52) questões e resolveram trinta e seis (36). No método de resolução foram usados os diagramas de Verganud e o Excel. Resultados mostraram que houve distinções entre professores da rede privada e da pública, revelando, além disso que a escolaridade foi um elemento diferenciador na resolução de questões. Na construção de itens, entretanto, a escolaridade não diferenciou os professores.
PALAVRAS - CHAVE: Estruturas Aditivas, diagramas de Vergnaud, Excel.

ABSTRACT: This study was designed to present part of an extension project that was obtained for (04) years (2007-2010), more especifically in 2010. For (04) four meetings focused on the construction and resolution of problem about Additive Structures using Veergnaud diagrams and Excel. To this end, twenty five (25) teachers from seven (07) schools, two (02) of which were private and five (05) public, built fifty-two (52) questions and resolved thirty-six (36). In the resolution method, Verganud and Excel diagrams were used. Results shows that there were distinctions between teachers from private and public schools, revealing, in addition, that schooling was a differentiating element in the resolution. In the construction of items, however, schooling did not differentiate teachers.
KEYWORDS: Additive structure math, Vergnaud diagram de , Excel.

1 I INTRODUÇÃO

Esse artigo mostra resultados obtidos a partir de um recorte feito no projeto de extensão intitulado Formação Continuada de Professores: Estruturas Aditivas, Multiplicativas e Fração, realizado nos anos de 2007, 2008, 2009 e 2010. Ao longo desses quatro anos, a Univasf-Universidade Federal do Vale do São Francisco estabeleceu relações de trabalho colaborativo em 2007 com a UPE-FFPP- Faculdade de Formação de Professores de Petrolina, influenciando a disciplina de Didática da Matemática, Estágio e Atividades Complementares. No ano de 2010, propusemos uma nova ação emancipatória, intitulada Formação continuada de professores: Estruturas Aditivas, Multiplicativas e Fração no uso do Excel, em parceria com a prefeitura da

cidade de Juazeiro-BA. O projeto fez parte das ações de um mestrado e doutorado inter-institucional Minter-Dinter entre a UFES e a Univasf. Entre os anos de 2008 e 2010 foram aceitos oito(08) artigos e dois(02) pôsteres. As escolas envolvidas foram: Joca de Souza Oliveira, Graciosa Xavier Ramos Gomes, Paulo VI, Cristal do Sol, Maria José Lima da Rocha, Cisne, Escola Normal Estadual Edivaldo M. Boaventura, Argemiro José da Cruz. Além disso, houve a participação de oito (08) aluno da disciplina de Núcleo temático de educação e políticas públicas do colegiado de psicologia na Univasf no ano de 2008. Além dessas disciplinas, no ano de 2010 foram realizados dois (TCC) Trabalhos de Conclusão de Curso no colegiado de engenharia da computação. À época, o diretor pedagógico da prefeitura de Juazeiro-BA compôs a banca examinadora dos TCCs, nos quais, foi desenvolvido o software denominado de Gerard em homenagem a Geràrd Vergnaud. No momento, o Gerard está em fase de registro pelo NIT- Núcleo de Inovação Tecnológica da Univasf. Além disso, foram realizados dois estágios curriculares (com bolsa paga pela prefeitura de Juazeiro-BA).

2 | ESTRUTURAS ADITIVAS E OS DIAGRAMAS DE VERGNAUD

Em[1] encontramos quatro exemplos de problemas matemáticos apresentados no Ensino Fundamental nas séries iniciais:

> *(1) Ao redor da mesa da sala de jantar de minha casa, estão sentados apenas 4 garotos e 7 garotas. Quantas pessoas estão sentadas ao redor da mesa?*
>
> *(2) Maria comprou uma caixa de bombons por R$ 4,00 e ainda ficu com R$ 7,00. Quanto ela possuía antes de fazer a compra?*
>
> *(3) Carlos tem 4 anos. Maria é 7 anos mais velha que Carlos. Quantos anos tem Maria?*
>
> *(4) Roberto foi jogar vídeo game. Ao fim da primeira fase do jogo ele tinha perdido 4 pontos. Ele, então, foi para a segunda e última fase do jogo. Ele terminou o jogo com 7 pontos ganhos. O que aconteceu na segunda fase?*

O formalismo matemático tradicionalmente utilizado para representar uma situação problema como exemplificadas nas situações (1), (2), (3) e (4) seria, portanto, 4+7 = 11; entretanto, tal expressão não evidencia, por quais caminhos a operação de soma foi atingida. Segundo [1,2] nas situações-problema acima exemplificadas estão presentes: (1) Conceito de medida (magnitude onze é maior que sete, que é maior do que quatro). (2) Conceito de adição; (3) Conceito de subtração; (4) Conceito de transformação de tempo (por exemplo, “Maria possuía agora...” quanto tinha antes?...).(5) Relação de comparação (por exemplo, “quem tem a mais, quem tem a menos?”, “quanto tem a mais, quanto tem a

menos?") e (6) Composição de quantidade. Entretanto, os conceitos presentes em situações aditivas nunca aparecem isolados [2] e, em razão disso, é necessário utilizar expressões da representação que explicitem tanto os conceitos quanto as relações entre eles. Para que tais conceitos sejam evidenciados, o mesmo autor propõe uma representação alternativa presente na Tabela 1.

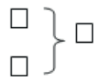
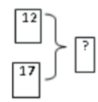
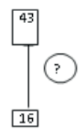
Categoria	RC	RSP	Tipos de Erros
1. Composição de medidas João tem 12 petecas e Pedro tem 17. Quantas petecas eles têm juntos?			EP,EC.
II. Transformação de medida Maria tinha 23 bombons. Ao final do dia, percebeu que só tinha 17. Quan-tos bombons Maria comeu durante aquele dia?			EP,EC, ES
III. Comparação de medidas Eu tenho 16 livros, você tem 43. Quantos livros você tem a mais do que eu?			EP,EC, ES

Tabela 1. Formas de Representação. Legenda EP: Erro de Posicionamento; EC: Erro de cálculo numérico; ES: Erro de sinal;RSP: Representação da situação-problema; RC: Representação da categoria

Fonte: Autor

Na segunda coluna da Tabela 1, a chave representa a categoria de composição de medidas; o quadrado representa o número natural, correspondente ao cardinal que representa uma quantidade envolvida na situação-problema. O círculo representa o número relativo. A seta horizontal para direita representa a categoria de Transformação de medidas, a seta vertical para cima representa a categoria de Comparação de medidas.

Este estudo mostra um recorte do projeto de extensão intitulado Formação continuada de professores: estruturas aditivas, multiplicativas e fração no uso do excel, para mostrar como ocorreram ações, especificamente, voltadas para ensinar a contrução dos diagramas, bem como observar os resultados dessa prática no ano de 2010. O objetivo deste trabalho foi, portanto, construir e resolver situações-problema sobre Esruturas Aditivas usando os diagramas da Tabela 1 e usando o Excel.

3 I DESENVOLVIMENTO

Com (25) vinte e cinco professres do Ensino Fundamental da cidade de Juazeiro-BA integrantes de (07) sete escolas, duas (02) privadas e (05) públicas, foram realizados

quatro (04) encontros. No primeiro encontro, as professoras trouxeram exemplos de provas para discussão. Nos (03) três encontros seguintes ocorreram a resolução e construção de situações-problema, bem como uma oficina para identificar os objetos matemáticos presentes no enunciado e em seguida a construção de uma situação-problema para cada categoria. Na ocasião, foi realizado dois tipos de tarefa: construir situações-problema como na Tabela 1 e dado o diagrama preenchido, construir o enunciado. Além disso, foi realizada uma oficina sobre Excel, no qual foi visto: a planilha como uma calculadora; começar o cálculo com um sinal de igual; utilizar outros operadores matemáticos, somar o total de todos os valores em uma coluna, copiar fórmulas, atualizar resultados de fórmulas, outras maneiras de digitar referências de célula; tipos de referência; resolver situações-problemas com Excel. O grafico de barras da Figura 1 e Figura 2 apresenta os tipos de questões predominantes nas avaliações aplicadas aos alunos.

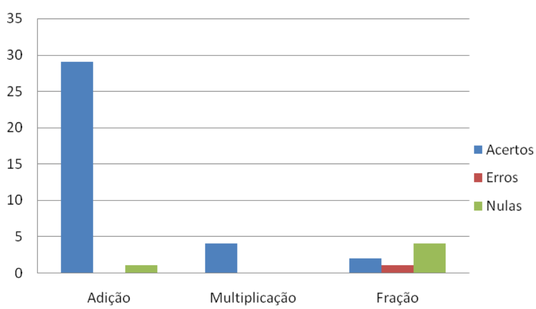


Figura 1. Tipos de questões nas escolas públicas

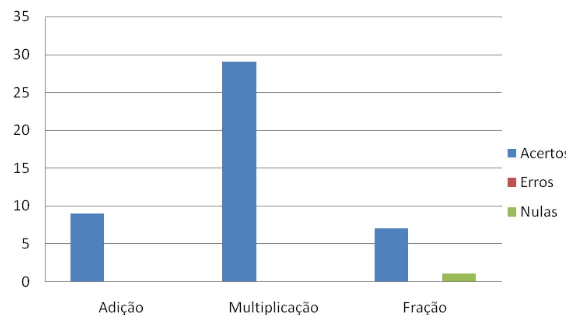


Figura 2. Tipos de questões nas escolas privadas

Fonte: Autor

Na Figura 1, de 30 questões predominaram aquelas sobre adição. Apresentando, uma resposta em branco e nenhum erro. Houve quatro (04) questões de multiplicação sem erros e sete (07) de fração com (02) acertos, (01) erro e (04) questões em branco. A seguir, os resultados na Figura 2 mostra predominância de questões de multiplicação, (29) vinte e nove questões certas, nove (09) questões sobre soma com nove (09) acertos e oito (08) questões sobre fração com uma questão em branco e sete (7) acertos. No segundo momento deu-se a analise dos contextos utilizados na folha de diagnóstico das provas na Figura 3 e Figura 4.

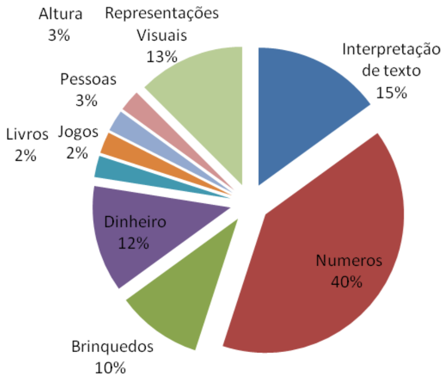


Figura 3. Contextos das questões presentes em provas das escolas privadas

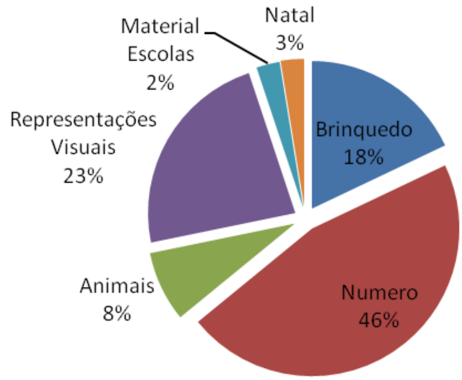


Figura 4. Contextos das questões presentes em provas das escolas públicas

Fonte: Autor

Como visto na Figura 3, vê-se que há (40%) quarenta por cento de questões utilizando números, revelando uma preferência por esse tipo de questão. As escolas públicas, por sua vez, como visto na Figura 4, vê-se a predominância de questões envolvendo números, entretanto em maior proporção do que na Figura 3. A partir desses dados confirma-se a preferência por questões que contém contextos numéricos. A Figura 3 com a Figura 4 sugerem que tanto professores e revisores(pessoas que fazem revisão de itens nas escolas) estão dando pouca atenção a essa distribuíção.

No uso dos diagramas, foram resolvidas (36) trinta e seis situações-problemas. Erros de categorização e posicionamento apareceram em todos os exemplos. Isso sugere que não perceber os aspectos qualitativos que diferencia cada categoria compromete o preenchimento do diagrama. O sinal do número relativo foi, por vezes, confundido com a operação a ser realizada, causando erro de sinal.

Na construção de itens de maneira livre, sem diagramas preenchidos, foram elaborados cinquenta e duas (52) questões, sendo vinte e oito(28) sobre Composição de Medidas, treze (13) de Transformação aplicada a uma medida e uma (1) de Comparação de medidas.

Além dos erros, apareceram: tentativas de negligenciar a forma, ou seja, durante a tarefa, os diagrama não eram preenchidos; na tarefa de construir itens, as professoras, primeiramente, construíam todas as situações-problema e no final voltavam para construir o diagrama correspondente(revelando pouca atenção dispensada a construção dos diagramas); erro na construção do diagrama, ou seja, as situação-problema eram construídas, entretanto ocorria erro na construção do diagrama correspondente; as professoras preferiram executar a atividade em dupla. A Figura 5 exemplifica um tipo de

exercício na construção de itens, no qual era dado o diagrama preenchido e solicitada a situação-problema correspondente. A Figura 6 mostra que com caneta e papel, os professores construíam os itens, entretanto, nota-se pelos trechos riscados que a construção, bem como a observação dos diagramas eram atividades feitas repetidamente até que o item estivesse criado.

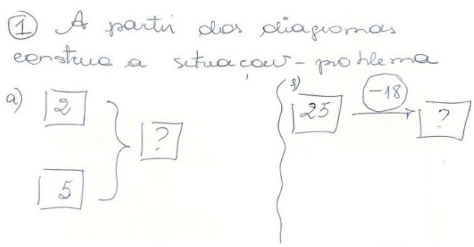


Figura 5. Diagrama preenchido

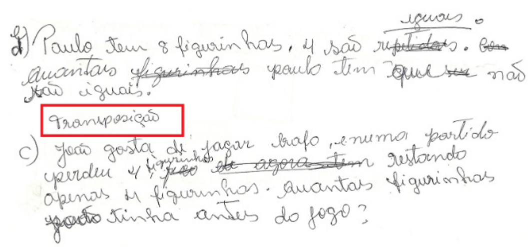


Figura 6 Construção de itens

Fonte: Autor

O resultado da Figura 6 foi obtido durante as tentativas de construção de itens com diagramas exemplificados na Figura 5**.** Sendo assim, esse resultado sugere que se houver um mecanismo para disciplinar a construção de itens, melhore a distribuição de tipos de situações-problema entre os itens criados. Além disso, vê-se na Figura 6 que a palavra transformação foi escrita errada. Ou seja, embora errada, a presença da palavra mostra que em cenários como esse, pensar sobre as categorias faz parte da construção de itens. A seguir, a Figura 7 e Figura 8 mostra um exemplo de situação-problema feita com o excel por duas duplas.

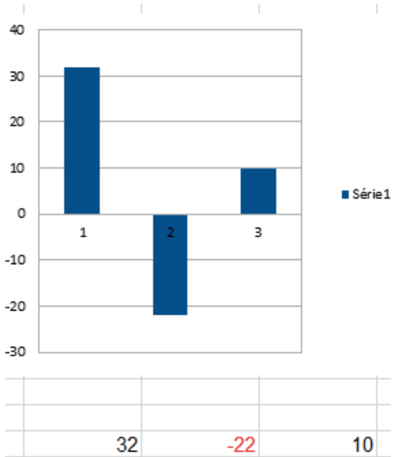


Figura 7. Dupla 01

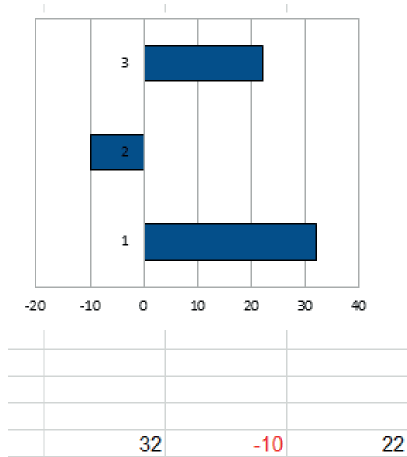


Figura 8. Dupla 02

Fonte: Autor

Nas Figura 7 e Figura 8 aparece a resolução de uma situação-problema usando gráfico de barras com Excel.

> *Maria faz coleção de figurinhas. Ela tem 32 duas figurinhas, sua mãe a presenteou com 22 figurinhas, quantas figurinhas ela tem em sua coleção agora?*

Como visto na Figura 7 e ***Figura 8*** , embora a transformação fosse positiva, a dupla (01) um inseriu a quantidade (32) trinta e dois na planilha, em seguida o número (22) vinte e dois acompanhado do sinal do número negativo resultando na quantidade 10. A dupla (02) dois, por sua vez, inseriu o valor negativo (10) dez e em seguida a quantidade 22. Com o Excel, quando o sinal é escolhido é negativo tanto o numero quanto o sinal ficam vermelho, já com os diagramas da Tabela 1 não há essa distinção. Para ambas as duplas, a interpretação dada a questão, foi equivocada, uma vez que o sinal deveria ter sido positivo e não negativo. Entretanto a presença do sinal foi explicitada. Vale ressaltar que esses valores não são resultantes de operações de soma e subtração, eles foram colocados diretamente na célula, apontando que os professores, primeiramente, executaram o cálculo mental de maneira equivocada e, em seguida, inseriam a representação criada mentalmente na planilha.

4 I DISCUSSÃO

Ambiguidade do operador de soma e subtração

Durante a ocorrência de erros de sinal, os professores demonstravam dificuldade em diferenciar dois elementos: a operação aritmética e o sinal do número relativo. Os resultados indicam que em situações aditivas apenas o conjunto dos números naturais

é percebido pelos professores. Antes, o operador de soma e subtração era usado para representar operações, agora passou a apresentar outra função: a de representar o sinal do número relativo. Essa ambiguidade foi o maior obstáculo para as professoras. Nessas situações, ao serem alertadas do erro, a maioria das duplas além de explicitar a ausência de percepção do conjunto dos números relativos, ainda buscava comparar com o método tradicional usado em sala de aula. A percepção das diferenças existentes entre a forma tradicional e a construção com diagramas e excel, explicitando melhor os elementos, as fizeram reconhecer que estavam equivocadas nas suas hipóteses iniciais.

Influência da escolaridade

A escolaridade foi um divisor de águas, as participantes com maior escolaridade, buscavam identificar elementos que diferenciassem as categorias, por exemplo, para categorizar uma situação-problema como sendo de comparação, a participante de maior escolaridade buscava, primeiramente, encontrar o elemento base da comparação. Caso esse elemento não estivesse presente no texto, ela excluía a possibilidade da situação-problema pertencer a tal categoria. Além disso, apresentavam maior resistência à instrução. Aquelas com maior escolaridade cometeram muitos erros consecutivos tentando resolver as questões sem ouvir as instruções fornecidas. Contudo foram capazes de resolver novas situações com base nas experiências prévias. Já aquelas com menor escolaridade, embora aceitassem melhor as instruções, apresentavam poucos sinais de generalização. Houve, entretanto, uma participantes que foi totalmente discrepante da maioria. Ela tinha a mais baixa escolaridade e apresentava problemas de atenção, nervosismo e costumava criar situações para evitar interações com os professores e alunos do projeto. Essa professora também apresentou problemas de organização e evitava se deparar com os erros cometidos.

5 | CONCLUSÃO

O projeto de extensão foi conduzido durante quatro anos(2007 a 2010) com bolsista pago pela Pró-reitoria de Extensão da Univasf, entretanto neste trabalho, foi apresentado os resultados observados em alguns encontros presenciais no ano de 2010 voltados, especificamente, para construir e resolver situações-problema sobre Estruturas Aditivas usando diagramas e Excel com professores de escolas publicas e privadas. Com (25) vinte cinco professores do Ensino Fundamental e (07) sete escolas sendo (02) duas privadas e (05) públicas viu-se que houve predominância no uso de situações aditivas nas avaliações aplicadas aos alunos, bem como na construção de itens houve predominância da categoria de Composição de Medidas. A principal contribuição deste trabalho foi, portanto, mostrar como ocorreu a construção e resolução de situações-problemas do campo aditivo com professores de escolas publicas e privadas no uso de diagramas de Vergnaud e do Excel, evidenciando, dessa forma, potenciais distinções na resolução de situações-problema entre escolas públicas e privadas, bem como entre a construção com diagramas e com

o Excel. Entretanto, os resultados mostram, alem disso, que a escolaridade foi um fator diferenciador, influenciando na tarefa de resolução de situações-problema. Contudo, a mesma influência não foi observada na tarefa de construção de ítens. Logo, como trabalho futuro, pretende-se retomar ações extensionistas voltadas para formação de professores no Ensino Fundamental, usando o software Gerard e, assim, apoiar e ampliar atividades de resolução de situações-problema e construção de ítens.

REFERÊNCIAS

1. MAGINA, Sandra. A Teoria dos Campos Conceituais: contribuições da Psicologia para a prática docente. **Encontro Regional de Professores de Matemática**, v. 18, 2005.

2. VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didáctica das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise psicológica**, v. 5, p. 75-90, 1986.

CAPÍTULO 12

UM ESTUDO SOBRE A UTILIZAÇÃO DE JOGOS E BRINCADEIRAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 30/11/2020

José Roberto Costa
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO
Guarapuava – Paraná
http://lattes.cnpq.br/2254880481341921

Vanessa Tluscik dos Santos
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO
Guarapuava – Paraná
http://lattes.cnpq.br/5756881154768612

RESUMO: Este trabalho apresenta reflexões sobre o desenvolvimento de uma pesquisa ocorrida em 2019/2020 relacionada ao uso de jogos e brincadeiras como modo de ensino e aprendizagem nas aulas de Matemática. Foi feita a análise de diversos trabalhos relacionados ao tema, que traziam vários exemplos de como tornar as aulas de Matemática mais atrativas ao aluno, para que os professores trabalhem os conteúdos de forma lúdica e divertida, proporcionando uma melhor aprendizagem matemática dos estudantes. O objetivo do estudo foi aprofundar os conhecimentos sobre o ensino dos conteúdos matemáticos utilizando Jogos, tomando como referenciais as produções científicas que abordam esse tema. A metodologia empregada foi a da pesquisa bibliográfica, relacionada ao uso de jogos na sala de aula, investigando sua utilização na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, de modo a tornar o ambiente da sala de aula mais lúdico e motivador. Pode-se concluir, após a cuidadosa análise de todos os trabalhos estudados, que os Jogos são de extrema importância para a aprendizagem da Matemática, pois eles podem contribuir e muito para a compreensão dos conteúdos. Com os jogos há a possibilidade de mostrar que a Matemática pode ser divertida, desde que ela seja trabalhada de forma lúdica, com materiais que chamem a atenção dos alunos.

PALAVRAS - CHAVE: Ensino e aprendizagem; Educação Matemática; Motivação; Jogos e brincadeiras; Metodologias inovadoras de ensino.

A STUDY ON THE USE OF GAMES AND PLAY IN MATH CLASSES IN BASIC EDUCATION

ABSTRACT: This work presents reflections on the development of a research that took place in 2019/2020 related to the use of games and games as a way of teaching and learning in Mathematics classes. The analysis of several works related to the theme was carried out, which brought several examples of how to make Mathematics classes more attractive to the student, so that teachers work the content in a playful and fun way, providing better mathematical learning for students. The aim of the study was to deepen the knowledge about teaching mathematical content using Games, taking as a reference the scientific productions that address this theme. The methodology used was that of bibliographic research, related to the use of games in the classroom, investigating its use in the learning of mathematical content, in order to make the classroom environment more

playful and motivating. It can be concluded, after careful analysis of all the works studied, that the Games are extremely important for the learning of Mathematics, as they can contribute a lot to the understanding of the contents. With games there is the possibility to show that Mathematics can be fun, as long as it is worked in a playful way, with materials that catch the students' attention.
KEYWORDS: Teaching and learning; Mathematical Education; Motivation; Games and play; Innovative teaching methodologies.

1 I INTRODUÇÃO

A Matemática é considerada a disciplina que mais assusta os alunos, haja vista que ela ainda vem sendo trabalhada por muitos professores de maneira totalmente tradicional, o que desmotiva os alunos, pois muitas vezes eles não veem sentido no que estão fazendo. A forma com que o professor trabalha os conteúdos fica muito mecanizada, partindo da memorização de conceitos, o que para muitos alunos é considerado algo chato.

É fato que a maneira de se ensinar a Matemática precisa ser repensada com metodologias que motivem os alunos a querer estudar. É preciso mostrar a importância desta disciplina na vida de todos no cotidiano. Pode-se fazer isso de maneira contextualizada, mostrando a utilidade de um conceito matemático, ou também utilizando jogos, que chamam muito mais a atenção dos alunos e podem contribuir de maneira significativa na aprendizagem matemática.

Cabe ao professor buscar formas de motivar seus alunos. Os jogos são um caminho que geralmente trazem essa motivação, pois os alunos gostam do desafio, da competição, da brincadeira em si, e é possível explorar os conteúdos matemáticos jogando, tornando o ambiente da sala de aula mais dinâmico, para que o aluno encare a Matemática como algo legal, e que aprenda brincando.

> A aprendizagem matemática é um processo mental da criança que passa por diferentes estágios no desenvolvimento do raciocínio lógico. Por isso, em muitas situações, um simples método de ensinar diferenciado pode ajudar na compreensão de conteúdos e "desmistificar" o ensino da Matemática (CHOMSKY; PIAGET, 1987).

Com os jogos é possível que os alunos tenham autonomia em sala de aula para desenvolverem as atividades elaboradas pelo professor, se tornando mais independentes de sua ação, como ocorre nas aulas tradicionais. Isso é reforçado pelas orientações das Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná.

> A aprendizagem matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou lista de exercícios (PARANÁ, 2008, p. 45).

Portanto, pode-se dizer que o uso de jogos e brincadeiras nas aulas de Matemática tende a contribuir para um melhor ensino e aprendizado dos conteúdos essenciais para a formação do aluno, haja vista que com o jogo o aluno poderá criar estratégias que desenvolverão seu raciocínio lógico.

2 I OBJETIVOS E METODOLOGIA

Este estudo teve por objetivo aprofundar os conhecimentos sobre o ensino dos conteúdos matemáticos através dos Jogos, tomando como referenciais as produções científicas que abordam esse tema. Para isto foram estudados diversos textos científicos que abordam o uso de Jogos no ensino da Matemática em sala de aula, de modo a proporcionar uma ampliação dos saberes relativos a esta ferramenta de ensino e contribuir para a melhoria do processo de ensinar e aprender os conteúdos matemáticos.

A metodologia empregada foi a da pesquisa bibliográfica, relacionada ao uso de jogos na sala de aula, investigando sua utilização na aprendizagem dos conteúdos matemáticos, de modo a tornar o ambiente da sala de aula mais lúdico e motivador.

Nesta investigação foram selecionados os seguintes trabalhos para estudo e análise: “Jogos como recurso didático no ensino das operações com números inteiros”, de Soleni Filipin; “Frações e Análise de Erros: uma nova perspectiva para a sala de aula”, de Elizangela Roth; “A utilização de desafios para estimular o raciocínio lógico dos alunos nas aulas de Matemática”, de Josiane Davibida; “O lúdico associado à resolução de problemas e jogos no ensino e aprendizagem de funções: uma abordagem diferenciada”, de Adriane Eleutério Souza; “O lúdico e sua importância para a aprendizagem da Matemática”, de Marcia Magalhães Riceto Delponte; “Os jogos no ensino da Matemática – entre o educativo e o lúdico”, de Lucimari Antoneli Menon; “Jogos matemáticos e tecnologia numa perspectiva construcionista: uma oficina para docentes da Educação Básica”, de Clodogil Fabiano Ribeiro dos Santos e Joyce Jaqueline Caetano; “O jogo e a brincadeira como promotores de aprendizagem”**,** de Monica Regina Piotrochinski de Farias; e, “O uso de jogos no ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental”, de Natiele Silva Lamera Elorza.

O trabalho foi iniciado em agosto de 2019 e concluído em julho de 2020. Inicialmente foi feita uma pesquisa bibliográfica e selecionados os diversos textos que versavam sobre o tema: Jogos nas aulas de Matemática. A procura recaiu em artigos, dissertações, teses e outros textos que estivessem de acordo com o tema proposto. A etapa seguinte foi desenvolvida com o fichamento das obras selecionadas, para que, depois, fossem discutidas e analisadas. Após a análise desses vários trabalhos científicos, apresentamos, a seguir, uma síntese de cada um deles, enfatizando os aspectos que mais contribuíram para a obtenção de resultados que respondessem as questões desta investigação.

3 | DESENVOLVIMENTO

O primeiro trabalho estudado foi o da professora Soleni Filipin, participante do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE – uma política pública de Estado regulamentado pela Lei Complementar nº 130, de 14 de julho de 2010 que estabelece o diálogo entre os professores do ensino superior e os da Educação Básica, através de atividades teórico-práticas orientadas, tendo como resultado a produção de conhecimento e mudanças qualitativas na prática escolar da escola pública paranaense), em 2016-2017, "Jogos como recurso didático no ensino das operações com números inteiros". O objetivo deste trabalho foi investigar os benefícios de trabalhar números inteiros tendo como recurso didático os jogos. Os Jogos apresentados neste trabalho tiveram por objetivo estimular o raciocínio lógico e também a socialização entre os alunos. O projeto foi desenvolvido em uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental, da Escola Estadual Edite Cordeiro Marques, localizada no município de Turvo, no Estado do Paraná.

Os jogos trabalhados foram: Termômetro Maluco; Números Balls; Memória dos Módulos e Números Opostos, todos desenvolvidos em grupos de alunos. Foi possível perceber que os alunos se envolveram e puderam explorar os conceitos de números inteiros de uma forma lúdica e prazerosa. Alguns deles relataram que com os jogos foi perdido o medo da Matemática e também puderam aprender mais. Segundo a autora, as atividades desenvolvidas despertaram o interesse dos alunos.

Na pesquisa, foi evidenciado que cerca de 90% dos alunos consideram o uso de jogos benéficos para a sua aprendizagem. Os outros 10% disseram que ainda precisam de atividade escrita. Com tudo isso ficou evidente que o professor deve repensar constantemente as maneiras de fazer com que seus alunos aprendam de maneira mais fácil e prazerosa (FILIPIN; COSTA, 2018).

O segundo trabalho analisado foi o da professora Elizangela Roth, também participante do PDE, em 2016-2017, "Frações e Análise de Erros: uma nova perspectiva para a sala de aula". A finalidade deste trabalho foi contribuir no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, por meio de uma intervenção pedagógica desenvolvida com o conteúdo de frações e a metodologia da análise de erros. Ele foi aplicado no Colégio Estadual do Campo de Cachoeira, em Candói, no Paraná, e desenvolvido com os alunos do 6º ano do Ensino Fundamental.

Uma das atividades deste trabalho foi a de dobraduras, com o objetivo de avaliar o conhecimento prévio dos alunos sobre o conteúdo de frações. Foi feita uma reflexão inicial nesse trabalho sobre as dificuldades do ensino dos conteúdos básicos de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

> A aprendizagem dos conceitos básicos de Matemática não está sendo feita de maneira eficiente, ocasionando um déficit nas séries iniciais, dificultando o trabalho dos docentes no 6º ano com os novos conceitos matemáticos,

> forçando esses professores a rever conteúdos que os alunos já deveriam saber (COSTA, 2013, p. 3).

Foram obtidos resultados satisfatórios com a aplicação da metodologia. As atividades desenvolvidas com os alunos indicam resultados positivos, decorrentes de uma nova postura metodológica do professor em sala de aula e de um tempo maior na preparação dos materiais e das atividades, na análise dos erros cometidos pelos estudantes e na aplicação do conteúdo de frações. Em contrapartida, a aprendizagem ganha mais significado, devido à atenção e ao cuidado dispensado com as respostas apresentadas pelos alunos, promovendo o aprendizado, a operatividade, a cooperação e o pensamento autônomo. Com isso, segundo ela, se amplia a compreensão acerca dos conhecimentos matemáticos, que são discutidos, analisados e construídos pelos próprios estudantes (ROTH; COSTA, 2018).

O terceiro trabalho estudado foi o da professora Josiane Davibida, também participante do PDE, em 2016-2017, "A utilização de desafios para estimular o raciocínio lógico dos alunos nas aulas de Matemática". O desenvolvimento das práticas envolveu um estudo de caso em uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Vereador Heitor Rocha Kramer – EFM, no município de Guarapuava, no Paraná. O trabalho teve como problematização saber de que forma o uso de desafios colabora para o desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno e de seu aprendizado dos conteúdos de Matemática (DAVIBIDA; COSTA, 2018).

O objetivo do trabalho foi mostrar o quanto o ambiente lúdico e desafiador pode ser favorável para a aprendizagem da Matemática, haja vista motivar os alunos a participarem das aulas e também se esforçarem mais. Atividades envolvendo desafios e charadas podem trazer resultados positivos na questão da aprendizagem dos alunos.

Foi constatado um maior interesse dos alunos em participar das aulas de Matemática, haja vista que estes apresentaram um bom desempenho na resolução dos desafios propostos, que é fruto da maior participação em sala, o que indica que este recurso motiva o aprendizado e contribui no aprimoramento do raciocínio lógico dos estudantes.

O quarto trabalho analisado foi uma dissertação de mestrado, de Adriane Eleutério Souza, "O lúdico associado à resolução de problemas e jogos no ensino e aprendizagem de funções: uma abordagem diferenciada". O objetivo do trabalho foi analisar e utilizar o lúdico no ensino de funções do 1º ano do Ensino Médio. A pesquisa foi realizada com alunos de uma escola da Rede Estadual de Educação da cidade de Guarapuava, Paraná. Foi explorado o jogo "Torre de Hanói" e também a resolução de problemas, utilizando o lúdico e algumas paródias.

Segundo a autora, para se ensinar Matemática é preciso que os educadores sejam criativos, busquem estratégias para atrair os alunos, mudando a visão deles sobre a Matemática.

Uma dessas estratégias foi fazer uso de paródias matemáticas, algo muito útil

quando se trata de chamar a atenção dos alunos, pois a música lida com as emoções dos estudantes, liberando, assim, um sentimento de prazer. Quando se fala de resolução de problemas com uso de personagens, isso é algo que chama a atenção dos alunos. Neste trabalho, a autora interpretou os personagens “Skatista” e “Maria, a mais bonita”. Em cada um, ela imitava o sotaque de cada personagem, tornando tudo mais atrativo e divertido. As paródias foram feitas tendo por base cada personagem. Com o personagem “Skatista”, a autora usou a paródia “Uma relação de A em B”, em ritmo de rap. Já a outra paródia, cantada pela personagem “Maria, a mais bonita” foi “Hoje aprendi na aula”, uma adaptação da música “Asa branca”, do cantor Luiz Gonzaga.

A autora relata que através destes mecanismos de aprendizagem os alunos se envolveram mais e puderam aprender funções de uma maneira divertida. Com os trabalhos feitos pela autora, foi possível desenvolver um DVD, que poderá auxiliar professores e futuros professores em sua profissão, trabalhando o conteúdo de funções de uma forma contextualizada e divertida (SOUZA, 2014).

O quinto trabalho estudado, “O lúdico e sua importância para a aprendizagem da Matemática”, de Marcia Magalhães Riceto Delponte, traz à tona a finalidade de fazer com que os alunos que estão adentrando o 6º ano vejam a Matemática de uma maneira diferente, com uma aprendizagem mais significativa, fazendo com que o aprendizado da Matemática ocorra de forma prazerosa e, que assim, consigam compreender os conteúdos lecionados.

Para tanto, foi usada uma metodologia que possibilitasse uma aprendizagem dos conteúdos utilizando jogos, com o intuito dos alunos superarem suas dificuldades em operações básicas da Matemática. Os jogos são um recurso valioso que pode enriquecer as aulas, trazendo motivação e alegria para os alunos, além de oportunizarem para que aprendam Matemática de uma forma divertida.

Neste trabalho se possibilitou aos alunos trabalharem em pequenos grupos, enfatizando que nem sempre se ganha, mas que em cada jogada é possível se aprender algo, motivando o aluno para que busque estratégias de jogo, pense, analise, use o raciocínio lógico, tudo isto para que seja facilitado o cálculo nas operações básicas de Matemática e também na resolução de problemas.

A Matemática vai além da memorização de fórmulas ou da resolução de inúmeras listas de exercícios. O professor pode partir do conhecimento prévio dos alunos e, assim, trazer jogos ou atividades diferenciadas, direcionadas aos alunos e com relação ao seu dia a dia, dando sentido ao que eles irão aprender.

Este trabalho contribui trazendo o uso de jogos para mudar algo que é atribuído ao ensino de Matemática, um dizer que passa de geração a geração, de que a Matemática é uma matéria difícil de se aprender. Foi feita uma investigação que constatou que os alunos iniciam as atividades tendo muitas dificuldades nas operações básicas de Matemática. Sendo assim, a autora deste trabalho utilizou seis jogos: “Bingo”, “Bomba”, “Baralho das

Operações", "Batalha das Operações", "Stop da Calculadora Quebrada" e a "Roleta", com o intuito de aprimorar o entendimento dos alunos no que se refere às quatro operações fundamentais da Matemática.

O trabalho com jogos em sala de aula se mostrou positivo, pois contribuiu para a compreensão e aprendizagem dos alunos, e também desenvolveu a socialização da turma, através de atividades feitas em pequenos grupos. A autora relata ainda que, com esse trabalho, os alunos passaram a buscar aprender os conteúdos matemáticos para participarem mais ativamente de cada jogada. O comportamento e comprometimento dos alunos foi algo muito positivo, pois eles se envolveram completamente na atividade (DELPONTE, 2016).

O sexto trabalho analisado foi "Os jogos no ensino da Matemática – entre o educativo e o lúdico", de Lucimari Antoneli Menon, desenvolvido com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Francisco Ramos, do município de Guamiranga, Paraná.

Diante do pressuposto de que os jogos são uma maneira de levar os alunos a pensar, levantar hipóteses, estratégias, organização e comprometimento, buscou-se trazer alguns jogos que são citados a seguir. O trabalho buscou contribuir para a superação de algumas dificuldades enfrentadas pelos estudantes, decorrentes do tratamento das operações básicas, da memorização da tabuada e suas consequências para a aprendizagem da disciplina. Para isso, foi desenvolvido um projeto com o intuito de identificar como esta abordagem pode contribuir na aprendizagem destes conteúdos. Inicialmente foi feita a apresentação do projeto, algo que deixou os alunos entusiasmados a participar.

Neste trabalho foi explorado o uso dos seguintes jogos: Shisima, um jogo de estratégia, criado no leste africano; Mancala, um jogo muito jogado ao redor do mundo, algumas vezes chamado de jogo de semeadura ou jogo de contagem e captura, já que foi inspirado nas tarefas agrícolas; Torre de Hanói; Sudoku, um jogo de lógica e raciocínio; Enigma, jogo que busca desenvolver a lógica e o cálculo numérico; Quadrado Mágico, um antigo quebra-cabeça numérico; Superquadrado mágico, jogo que é uma variação do jogo do quadrado mágico, com um grau de dificuldade maior; Jogo 106, um jogo que exige que sejam feitos cálculos rápidos; Stop da divisão, um jogo em que o aluno tende a desenvolver sua habilidade de cálculo e de compreensão da divisão; Jogo da trilha multiplicativa, que pode ser jogado em três etapas, e que é confeccionado em três jogos.

Depois da experiência obtida com esses jogos a autora concluiu que os jogos e materiais didáticos são de extrema importância para o aprendizado dos alunos. Ela enfatiza ainda a grande importância do professor conhecer bem a turma antes de levar algo diferente, pois tudo precisa ser estudado e analisado pacientemente, com o cuidado de não levar algo que esteja distante da realidade dos alunos e também não levar algo que seja muito fácil de eles resolverem, pois isso poderia desmotivá-los (MENON, 2018).

O sétimo trabalho analisado foi um capítulo de livro, "Jogos matemáticos e tecnologia numa perspectiva construcionista: uma oficina para docentes da Educação Básica", de

Clodogil Fabiano Ribeiro dos Santos e Joyce Jaqueline Caetano. O objetivo era explorar e comentar sobre a grande importância que os jogos têm nos dias atuais, dentro da sala de aula. De acordo com os autores, se os educadores conseguissem compreender o papel dos jogos na aprendizagem matemática, poderíamos usá-los em nossas aulas como um dos objetos mais importantes para concretizar o sucesso do processo de se ensinar e aprender Matemática.

Neste trabalho foi usada a ferramenta *Scratch*, uma linguagem de programação, desenvolvida em 2007 pelo Scratch Lifelong Kindergarten Group do MIT Media Lab, com apoio financeiro da National Science Foundation*, da* Microsoft, da Intel Foundation, da Nokia e do MIT Media Lab Research Consortia. O uso dessa ferramenta, que está disponível online, possibilita a criação de programas computacionais na forma de roteiros (scripts). Ela foi realizada dentro de uma “Oficina de Jogos e *Scratch*”, proposta como recurso de extensão para professores de Matemática, participantes do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE), da Secretaria de Estado da Educação (SEED) do Paraná. Essa Oficina contou com a participação de oito professores que atendiam o citado Programa, além de dois docentes do Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) – Campus de Irati, Paraná, e dois bolsistas do Programa de Extensão Universitária.

Buscou-se estabelecer relações entre estratégia de uso de jogos na aprendizagem de conceitos matemáticos com a programação computacional, com o objetivo de identificar uma relação entre esses meios, fazendo assim uma metodologia diferente das abordagens tradicionais.

Ao longo do trabalho, os autores puderam perceber o impacto que os jogos podem causar nos alunos. Isso é destacado em seu trabalho em um trecho dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática: “[...] um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver” (BRASIL, 1997, p. 48-49).

Esta estratégia mostrada no trabalho não é a solução para todos os problemas enfrentados pelos professores de Matemática, mas que pode contribuir sobremaneira para a diversificação das atividades didáticas (SANTOS; CAETANO, 2017).

O oitavo artigo analisado foi “O jogo e a brincadeira como promotores de aprendizagem”**,** de Monica Regina Piotrochinski de Farias. O objetivo deste trabalho era introduzir jogos e brincadeiras nas aulas de Matemática, para que estas se tornassem mais motivadoras para os alunos. A proposta foi aplicada em uma turma de 5ª série do turno da tarde do Colégio Estadual Juscelino Kubitschek de Oliveira – Ensino Fundamental e Médio, na cidade de São José dos Pinhais, no Paraná. O trabalho expõe alguns jogos que podem ser trabalhados nesta série e que tendem a favorecer o aprendizado da Matemática.

A metodologia de trabalho consistiu na elaboração de brincadeiras e jogos diferenciados que pudessem ser usados nas diversas séries do Ensino Fundamental, sendo adaptados a alguns conteúdos. Entre os jogos estão: Dominó de algarismos romanos; Dominó de contagem; Dominó de divisão; Dominó de multiplicação; Dominó das operações e seus termos; Dominó das principais figuras geométricas; Quebra-cabeças; Ábaco; Mosaico da tabuada; Tabuada cantada; Avançando com o resto.

Este trabalho pode ser extremamente importante se feito nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois se a base matemática adquirida neste nível de ensino for sólida, os alunos terão poucas dificuldades quando adentrarem os anos finais do Ensino Fundamental.

Na primeira etapa deste projeto foram expostos os objetivos a serem alcançados pelos professores do colégio, com uma posterior divisão de tarefas, evidenciando o que cada um teria de confeccionar.

Antes de iniciarem os jogos nas aulas, foi aplicada uma prova envolvendo leitura de numerais, nomenclatura de algumas figuras geométricas, operações com números naturais e situação-problema envolvendo números naturais. Depois de várias aulas com jogos, foi aplicada a mesma prova para compararem as respostas e verificarem se os alunos haviam evoluído. Foi constatado que houve uma melhoria significativa nos resultados obtidos e mostrou-se a grande importância e necessidade de se trabalhar com os jogos, com o concreto, algo que faz os alunos enxergarem o que estão fazendo (FARIAS, 2011).

O nono e último trabalho estudado foi "O uso de jogos no ensino e aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental", de Natiele Silva Lamera Elorza. O objetivo deste trabalho foi abordar os tipos de jogos e os conteúdos utilizados para relacionar com a formação de professores.

Foram feitas investigações em dissertações de mestrado e teses de doutorado realizadas entre 1991 a 2010, sobre jogos e o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Este trabalho pode inspirar professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental a começarem a desenvolver uma prática docente diferente da que vem acontecendo há muito tempo, para fazer com que em breve nossas crianças deixem de ter a aversão pela Matemática e percebam sua importância no dia a dia de todos (ELORZA, 2016).

Depois de analisar todos esses trabalhos, pode-se afirmar que os Jogos são de extrema importância para a aprendizagem da Matemática, pois eles tendem a contribuir e muito para a compreensão dos conteúdos. Com os jogos há a possibilidade de mostrar que a Matemática pode ser divertida, desde que ela seja trabalhada de forma lúdica, com materiais que chamem a atenção dos alunos. Atualmente existem muitos jogos educativos que utilizam a tecnologia como recurso para chamar a atenção das crianças e jovens, que na atualidade estão totalmente conectados aos celulares, dedicando a eles muitas horas do dia. Frente a isso, se torna necessário utilizar esse vício dos alunos em prol de sua

aprendizagem.

4 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

As aulas tradicionais não cativam mais os alunos, apesar de que para alguns professores o quadro e giz ainda sejam suficientes para que ocorra o aprendizado. Felizmente, para outros, é preciso tomar iniciativa e propor algo que venha de encontro ao interesse do aluno, que o faça sentir gosto pelo que está fazendo. Neste sentido, ressaltamos a importância dos jogos como material didático diferenciado de ensino, haja vista que com eles é possível trabalhar os conceitos matemáticos, por meio de uma exploração dos conteúdos de uma forma diversificada e lúdica.

Fica evidente que é possível ensinar e aprender de uma maneira divertida, onde o aluno deixa de ter aversão à Matemática e passa a olhar para ela de uma forma diferente. Isso exige muito esforço e dedicação por parte do professor, haja vista que a utilização de atividades diferenciadas não é algo fácil de fazer, é preciso planejamento e paciência para que tudo ocorra de maneira a favorecer o aprendizado, ou seja, é preciso sair do comodismo se o que se pretende é inovar e motivar os alunos para que queiram estudar e aprender Matemática.

O desenvolvimento deste trabalho possibilitou explorar as diferentes maneiras de se ensinar e aprender conteúdos matemáticos, analisando as práticas docentes que atualmente podem influenciar outros professores a reverem seu modo de ensinar, para que abandonem concepções ultrapassadas de ensino e busquem alternativas metodológicas que realmente contribuam para um aprendizado mais significativo dos alunos.

É preciso mudar a visão do aluno, para que ele perceba a grande importância da Matemática em seu dia a dia. Mas isso só ocorrerá se os professores mesclarem o ensino tradicional com novas práticas docentes. Os jogos são um bom exemplo dessas práticas, se constituindo em uma tendência metodológica que contribui para a ocorrência de resultados positivos no trabalho pedagógico do professor com a Matemática.

Podemos dizer que ao longo desse período em que foram analisados diversos trabalhos, foi possível perceber a grande dificuldade que os alunos têm para aprender Matemática quando utilizada a forma tradicional de ensino. Os jogos e brincadeiras podem mudar isso, pois com eles os alunos ficam motivados para aprender. Os jogos trabalhados em pequenos grupos podem propiciar a socialização dentro da sala de aula, possibilitando a troca de ideias entre os alunos, que passam a ver onde erraram e onde acertaram, podendo discutir acerca do conteúdo que está sendo trabalhado, ou seja, o aluno se torna um ser mais ativo dentro da sala de aula e o professor tem seu papel alterado, passando a agir como um mediador do processo, diferentemente das aulas puramente tradicionais.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHOMSKY, N; PIAGET, J. **Teorias da Linguagem, Teorias da Aprendizagem** (Trad. Rui Pacheco). São Paulo: Edições 70, 1987.

COSTA, J. R. A relevância da Matemática ensinada nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: Anais do V Encontro Interdisciplinar de Educação. **Avaliação**: parâmetros e perspectivas na formação de professores. Universidade Estadual do Paraná – Campus de Campo Mourão. 10 a 14 de junho de 2013.

DAVIBIDA, J.; COSTA, J. R. A utilização de desafios para estimular o raciocínio lógico dos alunos nas aulas de Matemática. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. Curitiba: SEED/PR, 2018. (Cadernos PDE).

DELPONTE, M. M. R.; BENEVIDES, P. F. O lúdico e sua importância para a aprendizagem da Matemática. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2014**. Curitiba: SEED/PR, 2016. (Cadernos PDE).

ELORZA, N. S. L.; FURKOTTER, M. **O uso de jogos no Ensino e Aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. Disponível em: <www.sbem.com.br>. Acesso em: 08 fev. 2020.

FARIAS, M. R. P. O jogo e a brincadeira como promotores de aprendizagem. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2007**. Curitiba: SEED/PR, 2011. (Cadernos PDE).

FILIPIN, S.; COSTA, J. R. Jogos como recurso didático no ensino das operações com números inteiros. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. Curitiba: SEED/PR, 2018. (Cadernos PDE).

MENON, L. A.; SILVA, K. B. R. Os jogos no ensino da Matemática – entre o educativo e o lúdico. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. Curitiba: SEED/PR, 2018. V1. (Cadernos PDE).

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**. Paraná, 2008.

ROTH, E.; COSTA, J. R. Frações e Análise de Erros: uma nova perspectiva para a sala de aula. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. Curitiba: SEED/PR, 2018. (Cadernos PDE).

SANTOS, C. F. R.; CAETANO, J. J. Jogos Matemáticos e Tecnologia numa perspectiva construcionista: uma oficina para docentes da Educação Básica. In: CAETANO, J. J.; GARCIA, J. **O Ensino de Matemática**: diferentes olhares de pesquisa. São Paulo: Todas as Musas, 2017. Cap. 5. p. 91-112.

SOUZA, A. E. **O lúdico associado à resolução de problemas e jogos no ensino e aprendizagem de funções**: uma abordagem diferenciada**.** 2014. 113 f. Dissertação (Mestrado) – Curso de Mestrado Profissional em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2014.

CAPÍTULO 13

A INTERDISCIPLINARIDADE NA PRÁTICA PEDAGÓGIGA: RELAÇÃO ENTRE O ENSINO DE QUÍMICA E MATEMÁTICA NO BRASIL

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 05/12/2020

Catiex Rodrigues de Souza
Universidade Federal de Mato Grosso
Cuiabá/MT.
https://orcid.org/0000-003-3528-1474

Adelmo Carvalho da Silva
Universidade Federal de Mato Grosso
Cuiabá/MT.
https: //orcid.org/0000-0001-9995-0310

RESUMO: O presente trabalho, de natureza qualitativa, realizou-se um estado da arte a partir das pesquisas desenvolvidas nos Programas de Pós-Graduação nas áreas de Educação e Ensino de Ciências e Matemática que tratam sobre a interdisciplinaridade entre o Ensino de Química e Matemática. Com o objetivo de analisar o cenário de pesquisas entre as duas disciplinas, diagnosticar e compreender como as produções acadêmicas estão sendo estruturadas e divulgadas no território nacional. Foram selecionados para análise as teses e dissertações publicados no Catálogo de Teses e Dissertações CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento em Nível Superior) e a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, no período compreendido entre 2003 a 2017. Nesse contexto identificamos e analisamos dez trabalhos que abordam esta temática. A análise dos dados foi feita em duas categorias: aspectos gerais - ano de defesa, título, autores, região geográfica das instituições. E aspectos pedagógicos: nível de escolaridade; conteúdo e método, características do professor/ aluno e organização dos currículos. Observou-se modesta quantidade de produções em mestrado e doutorado e um enfoque nas produções em ralação ao nível médio. O Conteúdo e Método se destacam pela quantidade de produções acadêmicas, ressaltando a sua relevância no processo de ensino-aprendizagem interdisciplinar na prática pedagógica dos professores.

PALAVRAS - CHAVE: Estado da Arte; Produções Acadêmicas; Conteúdo e Método.

INTERDISCIPLINARITY IN PEDAGOGICAL PRACTICE: RELATIONS BETWEEN THE TEACHING OF CHEMISTRY AND MATHEMATICS IN BRAZIL

ABSTRACT: The present work, qualitative in nature, a state of the art was carried out based on the research developed in the Graduate Programs in the areas of Education and Teaching of Sciences and Mathematics that deal with the interdisciplinarity between Chemistry and Mathematics Teaching. To analyze the research scenario between the two disciplines, diagnose and understand how academic productions are being structured and disseminated in the national territory. The theses and dissertations published in the CAPES Thesis and Dissertations Catalog (Coordination for Improvement at Higher Level) were selected for analysis and the Digital Library of Theses and Dissertations, in the period from 2003 to 2017. In this context, we identified and analyzed ten papers that address this theme. Data analysis was performed in two categories: general aspects - year of defense, title, authors,

geographic region of the institutions. And pedagogical aspects: level of education; content and method, teacher / student characteristics and organization of curriculum. There was a modest number of master's and doctorate productions and a focus on productions in relation to the medium level. The Content and Method stand out for academic productions, emphasizing its relevance in the interdisciplinary teaching-learning process in the pedagogical practice of teachers.
KEYWORDS: State of art; Academic productions; Content and Method.

1 I INTRODUÇÃO

É de fundamental importância realizar um levantamento de produções acadêmicas por meio do "estado da arte" que foram desenvolvidas nos Programas de Pós-graduação em nível de mestrado e doutorado na área de Educação e Ensino em Ciências e Matemática, visto que, possibilita potencializar a necessidade de exploração frente a discussões e reflexões a cerca interdisciplinaridade entre o Ensino de Química e Matemática presente na prática pedagógica dos professores.

Em consequência disso, tem-se o objetivo de analisar e compreender o cenário do campo de pesquisa sobre a temática e diagnosticar como estão sendo desenvolvidas as pesquisas acadêmicas, com o intuito de compreender como elas vêm se estruturando e disseminando em todo o território nacional.

O estudo da presente pesquisa de natureza qualitativa, realizou-se um estado da arte, pois possibilita ao investigador realizar uma compreensão de fenômenos sociais tais como a educação. Por evidenciar, o reconhecimento da relação do pesquisador com o ambiente e a conjuntura investigada, sendo o pesquisador o principal instrumento optou-se por realizar uma pesquisa que trabalha o estado da arte. Com a finalidade de mapear e analisar as pesquisas sobre a interdisciplinaridade entre o Ensino de Química e Matemática desenvolvidas no país buscou-se as produções de Programas de Pós-Graduação da área de Educação e Ensino de Ciências e Matemática

A partir dos trabalhos selecionados realizou-se um estudo bibliográfico. Foram analisadas as publicações do Catálogo de Teses e Dissertações CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento em Nível Superior) e a Biblioteca Digital de Teses e Dissertações no período compreendido entre 2003 a 2017. Nesse contexto identificamos e analisamos dez trabalhos que abordam a temática em duas categorias. A primeira refere-se dos aspectos gerais: ano de defesa, título, autores, região geográfica que pertencem às instituições dos Programas de Pós-Graduação. E a segunda categoria dos aspectos pedagógicos: nível de escolaridade; conteúdo e método, características do professor e organização dos currículos.

2 I FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA: ENSINO DE QUÍMICA E MATEMÁTICA: UM OLHAR INTERDISCIPLINAR

Este tópico tem como objetivo apresentar uma teorização sobre o objeto de investigação, sua origem e interpretações conceituais. Para tanto, apresenta a importância do ensino-aprendizagem da disciplina de Química e Matemática. E a sua relevância em explorar suas competências e habilidades em um contexto interdisciplinar de professores e estudantes do Brasil.

2.1 O Ensino de Química

Os documentos normativos sobre o Ensino de Química na Educação Básica, apontam para a necessidade de os estudantes compreenderem os processos químicos relacionados às suas aplicações tecnológicas, sociais e ambientais de maneira que possam tomar decisões críticas e responsáveis pelo meio que se encontra. (OCN, BRASIL, 2008)

De acordo com a Orientação Curricular Nacional (2008)

> [...]a química tem sua razão de ser, sua especificidade, seu modo de interrogar a natureza, controlar respostas por meio de instrumentos técnicos e de linguagem peculiares, identificando as pessoas que os dominam como químicos educadores ou educadores químicos. (BRASIL, 2008, p.104)

Em relação ao exposto, o PCN+ complementa,

> [...] a química pode ser um instrumento da formação humana que amplia os horizontes culturais e autonomia no exercício da cidadania, se o conhecimento químico for promovido como um dos meios de interpretar o mundo e intervir na realidade, se for apresentado como ciência, com seus conceitos, métodos e linguagens próprios, e como construção histórica, relacionada ao desenvolvimento tecnológico e aos muitos aspectos da vida em sociedade. (BRASIL, 2002, p.87).

A proposta apresentada para o ensino de Química no PCN+, "pretende que o aluno reconheça e compreenda, de forma integrada e significativa, as transformações químicas que ocorrem nos processos naturais e tecnológicos em diferentes contextos" (BRASIL, 2002).

Sendo assim, os conhecimentos químicos estão associados ao desenvolvimento de habilidades para lidar com ferramentas culturais específicas à forma química de entender e agir no mundo, e que, por sua vez um conjunto de habilidades associadas à apropriação de ferramentas culturais (conceitos, linguagens, modelos específicos).

2.2 O Ensino de Matemática

Ao descrever sobre o Ensino de Matemática, alicerçado no documento da BNCC (2018), apresenta duas modalidades Ensino Fundamental e Médio. O Ensino Fundamental, "centra-se na compreensão de conceitos e procedimentos em seus diferentes campos e no desenvolvimento do pensamento computacional, visando à resolução e formulação

de problemas em contextos diversos". Enquanto no Ensino Médio, os estudantes devem alicerçar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e "agregar novos, e construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade no seu cotidiano". (BRASIL 2018, p.47)

De acordo Barbosa (2016), a matemática interfere na construção de capacidades intelectuais, na estrutura do pensamento e na construção do raciocínio dedutivo. Diante disso a matemática é de grande relevância por desempenhar a função de permitir resolver problemas do cotidiano.

Em relação ao que foi evidenciado os PCNs (BRASIL, 1997, p.19) afirmam que:

> A Matemática, surgida na Antiguidade por necessidades da vida cotidiana, converteu-se em um imenso sistema de variadas e extensas disciplinas. Como as demais ciências, reflete as leis sociais e serve de poderoso instrumento para o conhecimento do mundo e domínio da natureza. (BRASIL, 1997, p.19).

Diante do exposto, percebe-se a importância de uma eficiente aplicação de processos educativos que envolvem o ensino e aprendizagem em Matemática.

2.3 Interdisciplinaridade do Ensino de Química e Matemática

Inicialmente, referenciaremos três autores brasileiros de reconhecimento nacional que estudam a cerca da interdisciplinaridade que são Japiassu (1976); Fazenda (2002) e Amaral (1993) que trazem o princípio da intensidade das contribuições disciplinares que aborda o tema interdisciplinar sob o enfoque epistemológico e educacional.

Ao abordar o tema interdisciplinar segundo o aspecto epistemológico, Japiassu (1976), relata que "[...] a interdisciplinaridade caracteriza-se pela intensidade das trocas entre especialistas e pelo grau de integração real das disciplinas no interior de um mesmo projeto de pesquisa." (JAPIASSU, 1976, p.74).

Para Amaral (199[1]), proporciona sua contribuição da interdicisplinaridade na perspectiva escolar e o ensino de ciências. Para o autor:

> Do ponto de vista curricular, a integração do conhecimento pode ser dar de diferentes formas, com grau crescente radicalidade. A maneira mais tênue é aquela em que o método científico é tomado com o grande elemento unificador de diferentes campos do conhecimento. (AMARAL, 1993).

Fazenda (2002) enfatiza a interdisciplinaridade voltada para a escola e para a aplicabilidade na sua dimensão prática e metodológica. Diante disso a autora afirma que "a interdisciplinaridade depende, então basicamente, de uma mudança de atitude perante o problema do conhecimento da substituição de uma concepção fragmentada pela unitária do ser humano". (FAZENDA, 2002, p.30).

---

1 AMARAL, Ivan Amorosino do. **Interdisciplinaridade e currículo de Ciências no 1º grau**. Campinas, SP. 1993. Trabalho não publicado, porém foi encontrado no anexo 9 da Dissertação de Mestrado: PEREIRA, Francielle Amâncio. **O Gestor Escolar e o Desafio da Interdisciplinaridade no Contexto do Currículo de Ciências.** Faculdade De Educação Universidade Estadual De Campinas, São Paulo, 2008.

Diante do exposto, a interdisciplinaridade é desenvolvida por algum tipo de interação entre duas ou mais áreas do conhecimento, seja pela simples troca de ideias ou informações entre elas, seja pela síntese de conceitos, metodologias, procedimentos, epistemologia, terminologia, instaurando um discurso que se processa num nível diferente ao daquelas disciplinas individualmente - com uma nova linguagem, novos conceitos e metodologias que se organizam em busca da solução de um problema comum (JAPIASSU, 1976).

Ao correlacionar o ensino interdisciplinar com a Matemática, o PCN (2002), relata que:

> os desenvolvimentos dos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, não é dever exclusivo apenas do professor de matemática, mas também das outras disciplinas. Assim, faz-se necessário proporcionar condições para que o aluno possa construir os conceitos matemáticos, evitando apenas memorização. (BRASIL, 2002)

Ao relatar sobre a interdisciplinaridade tendo como base o ensino de Química, as Orientações Curriculares (2008), colabora no sentido que a

> Contextualização e a interdisciplinaridade como eixos centrais organizados das dinâmicas interativas no ensino de química, na abordagem de situações reais trazidas do cotidiano ou criadas na sala de aula por meio da experimentação não dissociadas da teoria, não sejam apenas elementos de motivação ou de ilustração, mas efetivas possibilidades de contextualização dos conhecimentos químicos. Entretanto, defende uma abordagem de temas sociais (do cotidiano) e uma experimentação que, não dissociadas da teoria, não sejam pretensos ou meros elementos de motivação ou de ilustração, mas efetivas possibilidades de contextualização dos conhecimentos químicos, os tornados socialmente mais relevantes. (BRASIL, 2008 p.17).

Para isso é necessária a articulação na condição de propostas pedagógicas nas quais situações reais tenham papel essencial na interação com os alunos (suas vivências, saberes, concepções), sendo o conhecimento, entre os sujeitos envolvidos, meio ou ferramenta metodológica capaz de dinamizar os processos de construção e negociação de significado.

3 I ASPECTOS METODOLÓGICOS

O estudo da presente pesquisa de natureza qualitativa, um estado da arte. Foi realizado em duas partes, a primeira trata-se da obtenção dos dados e a segunda da coleta de informações e tratamento dos dados produzidos. Primeiramente, buscou a obtenção do material da análise: as dissertações de mestrado e tese de doutorado publicados no Catálogo de Teses e Dissertações CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento em Nível Superior) e na Biblioteca Digital de Teses e Dissertações, no período de 2003 a 2017. Pesquisamos por palavra-chave correlata com a temática deste trabalho que foram: Ensino de Química, Educação Química; Ensino de Matemática; Educação Matemática,

interdisciplinaridade e interdisciplinaridade de ensino de Química e Matemática. A partir da seleção das produções, iniciamos a segunda parte, mencionada anteriormente, realizamos a obtenção dos textos. Em uma análise preliminar, foram selecionados os resumos. Posteriormente, fez-se necessário realizar a cópia integral dos textos para a descrição dos itens: tipo de produção, ano de defesa, Programa de Pós-graduação, objetivos e resultados das produções acadêmicas.

A justificativa para a escolha do tipo de pesquisa qualitativa, pois proporciona ao investigador trazer a explicação e compreensão de fenômenos sociais tais como a educação. (LUDKE e ANDRE, 1986, p.17). Por evidenciar, o reconhecimento da relação do pesquisador com o ambiente e a conjuntura investigada, sendo o pesquisador o principal instrumento optou-se por realizar uma pesquisa que trabalha o estado da arte, definida como de natureza bibliográfica. as pesquisas denominadas "estado da arte" são uma modalidade de pesquisa do tipo histórico-bibliográfica ou de revisão. Têm por objetivo realizar análises históricas e/ou revisão de estudos ou processos, tendo como material de análise os documentos escritos e/ou produções culturais levantados em arquivos e acervos. A partir destes, "procuram inventariar, sistematizar e avaliar a produção científica numa determinada área (ou tema) desconheciment**o**". (FIORENTINI, 1994, p.32 apud GARCEZ 2014).

Para a organização da coleta de dados foi preciso estabelecer quatro etapas: Leitura e classificação das pesquisas; Organização dos dados em fichas de classificação para geração de um banco de dados; análise dos resultados; elaboração de pequenos resumos das pesquisas. Com o objetivo de observar as possíveis contribuições acadêmicas. Caracterizamos as de acordo com os dados fornecidos por elas. Deste modo, determinamos a sua classificação e descrição para a análise em duas categorias. A primeira refere-se dos aspectos gerais: ano de defesa, título, autores, região geográfica que pertencem às instituições dos Programas de Pós-Graduação. E a segunda categoria dos aspectos pedagógicos: nível de escolaridade; conteúdo e método, características do professor/ aluno e organização dos currículos.

4 | DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Agrupamos dez trabalhos, identificamos que são oito dissertações de mestrado e duas teses de doutorado relacionadas à temática desse trabalho, produzidos nos Programas de Pós- graduação da área de Ensino de Ciências e Matemática, no período compreendido entre 2003 a 2017. Os aspectos gerais: tipo, ano de defesa, autores e instituição de dissertações e teses do ensino interdisciplinar das disciplinas de Química e Matemática está representada no quadro 1.

Tipo	Autor/Ano de defesa	Título	Instituição
D	Felipe Augusto Martinazzo Fontes (2014)	Aprendizagem de funções por meio da modelagem matemática: um estudo do comportamento de um composto químico	UFSC
D	Roquelany Batista Maranhão (2015)	O Laboratório de ciências da natureza: uma proposta interdisciplinar para professores de matemática do segundo ano do ensino médio	UFC
DP	José Ernandes Oliveira de Santana (2016)	Matemática aplicada à química	UFC
T	Maria Helena Sebastiana Sahão (2003)	Matemática na formação do químico contemporâneo	UNESP
T	Lourival Gomes da Silva (2017)	Concepções de professores de matemática e química sobre a avaliação de aprendizagem: um estudo de caso em um curso de licenciatura plena	UFRGS
D	Carlos Eduardo Pereira Aguiar (2017)	Contribuição da contextualização de modelagem sob o enfoque simbólico-matemático no processo de ensino-aprendizagem da estequiometria	UFAM
DP	Paulo Giovane Aparecido Lemos (2013)	Funções aplicadas a física e Química	UFJF
D	Marcelo Maia Cirino (2007)	A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos à cinética química no ensino médio	UNESP
D	Ainá Montessanti Selingard (2015)	O estudo da função afim no ensino médio com apoio de uma atividade experimental	UFSCar
D	Zoriane Soares Pereira Pimentel (2015)	Sobre a importância da matemática aplicada: analise de conteúdos programáticos nos planos de ensino dos cursos de licenciatura em ciências da natureza, biologia e química	UFRGS

Quadro 1. Relação das Teses e Dissertações Interdisciplinar Química e Matemática

Legenda: T - Tese de Doutorado; D - Dissertação de Mestrado Acadêmico; DP - Dissertação de Mestrado Profissionalizante.

A primeira tese de doutorado foi realizada em 2003, referente ao trabalho desenvolvido na Universidade Estadual de São Paulo (UNESP), enquanto a primeira defesa de mestrado foi defendida no ano de 2007 também UNESP. A segunda tese de doutorado foi defendida em 2017 pela Universidade federal do Rio Grande do Sul.

Números de Trabalhos	Região Geográfica/ Instituição
3	Sudeste / UNESP; UFSCar
3	Sul / UFRGS; UFSC
3	Nordeste / UFJF; UFC
0	Centro – Oeste
1	Norte / UFAM
10	Total

Quadro 2. Distribuição das dissertações e teses conforme a região geográfica no período de 2003 a 2017.

De acordo com os dados apresentados no quadro 2, verificamos que as regiões Sul, Sudeste e Nordeste contribuíram com quantidades iguais de três produções de trabalhos acadêmicos. Desta forma, a região Sul teve a participação das instituições da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) e a Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). As instituições da região Sudeste foram a Universidade Estadual de São Paulo (UNESP) e a Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). E região Nordeste com a Universidade Federal de João Pessoa (UFJF) e a Universidade Federal do Ceará (UFC). Enquanto, a região Norte com apenas uma produção da Universidade Federal do Amazonas (UFAM). Em contrapartida a região Centro-Oeste não contribui com nenhuma produção acadêmica referida a temática da interdisciplinaridade entre as disciplinas de Química e Matemática.

Em relação aos aspectos pedagógicos, foram analisados os níveis de escolarização (Ensino superior, Ensino Médio e Ensino Fundamental), o conteúdo, método e currículo. De acordo com síntese das pesquisas que elaboramos para facilitar a compreensão neste trabalho.

A primeira tese que foi defendida por Sahão (2003), intitulada *Matemática na formação do químico contemporâneo.* Em sua pesquisa a autora analisa aspectos relativos à Matemática, como disciplina em serviço, na formação dos químicos contemporâneos, segundo o ponto de vista dos químicos docentes de várias Instituições de Ensino de Química do Brasil e de alguns profissionais químicos. Como resultado de sua pesquisa faz apontamentos de novos e possíveis caminhos para a discussões sobre a organização dos Currículos de matemática nos cursos de Química no Brasil.

Enquanto, a segunda tese de doutorado, realizada por Silva (2017), cujo tema Concepções de professores de matemática e química sobre a avaliação de aprendizagem: um estudo de caso em um curso de licenciatura plena busca analisar as concepções dos professores de Matemática e Química sobre suas práticas avaliativas, ao considerarem os erros nas avaliações de aprendizagem em um curso de Licenciatura Plena em Química

em uma Faculdade Municipal, localizada na zona da mata sul do Estado de Pernambuco. O autor trouxe como resultados algumas propostas de aperfeiçoamento do processo de ensino e de aprendizagem nesta faculdade, privilegiando uma avaliação interdisciplinar, construtiva, holística, crítica e reflexiva.

A primeira dissertação de mestrado foi escrita por Cirino (2007), intitulada *A intermediação da noção de probabilidade na construção de conceitos à cinética química no ensino médio* procurou identificar como estudantes do Ensino Médio se apropriam de conceitos e elaboram determinados modelos inseridos em Cinética Química, especificamente o modelo cinético de colisão de partículas numa reação (Teoria das Colisões). De acordo com autor, com resultados obtidos apontam para grandes discrepâncias entre o modelo cinético de colisões elaborado pelos estudantes e o cientificamente aceito.

Maranhão (2015) desenvolveu o tema de sua pesquisa com o tema -O Laboratório de ciências da natureza: uma proposta interdisciplinar para professores de matemática do segundo ano do ensino médio como objetivo de apresentar uma proposta de ensino, visando contribuir para minimizar o desinteresse dos alunos, pela disciplina Matemática, através de uma ação de cunho interdisciplinar como ferramenta de articulação entre os conhecimentos da Matemática e das Ciências da Natureza no âmbito dos laboratórios de Física, de Química e de Biologia, com alunos de duas turmas de 2.º ano do Ensino Médio de uma escola pública do estado do Ceará. A autora relata em seus resultados que os sujeitos aderiram aos procedimentos metodológicos, e reagiram positivamente diante dos resultados obtidos por meio dos experimentos realizados no Laboratório de Ciências Naturais.

Fonte (2014), em sua pesquisa intitulada *Aprendizagem de funções por meio da modelagem Matemática: um estudo do comportamento de um composto químico* teve como objetivo propor o uso da Modelagem Matemática na resolução de problemas, em especial para estudar o processamento de compostos químicos de algum medicamento pelo organismo humano. Segundo o autor, como resultado de sua pesquisa identificou várias tendências sobre como ensinar funções.

Lemos (2013), em sua pesquisa denominada *Funções aplicadas a física e Química* apresentou uma sequência de atividades utilizando os conceitos de alguns tipos funções: afim, logarítmica e trigonométricas. Tratando, também, a interdisciplinaridade com as disciplinas física e química. De acordo com o autor, todas as atividades estão de acordo com os propósitos do PCNEM, agem do CBC/Matemática - SEE/MG e trabalham a interdisciplinaridade entre Matemática e Física ou entre Matemática e Química, mostrando que a Matemática não se trata de uma ciência isolada como tantos alunos pensam.

Selingard (2015), em seu trabalho nomeado *O estudo da função afim no ensino médio com apoio de uma atividade experimental* tem–se o propósito de contribuir com a superação das dificuldades relativas ao ensino do conceito de função e suas aplicações, construiu uma proposta didática interdisciplinar. Considera que a situação ideal é combinar

com os professores das disciplinas experimentais de forma que eles possam fazer experimentos e obter os dados. O professor de Matemática ficaria com a parte de analisar esses dados.

Quando se diz a respeito, do ensino interdisciplinar de química e matemática no Ensino Superior, Zoriane (2015), em sua pesquisa designada *Sobre a importância da matemática aplicada: análise de conteúdos programáticos nos planos de ensino dos cursos de licenciatura em ciências da natureza, biologia e química*, tem o objetivo de analisar questões relacionadas ao ensino da Matemática como ferramenta essencial para o entendimento dos conteúdos básicos, como também dos fenômenos e dos processos relacionados aos cursos de Licenciatura em Ciências Biológicas, Química e Ciências da Natureza em duas instituições públicas de formação de professores, a Faculdade de Formação de Professores da Mata Sul - FAMASUL e a Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA. Com o resultado da análise dos planos de ensino, foi possível evidenciar uma ênfase na organização dos conteúdos de matemática apontam a necessidade de uma melhor compreensão, por parte dos professores de matemática, do campo para o qual se propõe ser instrumento.

E a dissertação mais recente foi redigida por Aguiar (2017), tendo como título *Contribuição da contextualização de modelagem sob o enfoque simbólico-matemático no processo de ensino-aprendizagem da estequiometria*, Este trabalho de pesquisa centralizou-se na investigação de como a contextualização e a modelagem poderiam contribuir para minimizar as dificuldades de aprendizagem, no ensino do conteúdo estequiometria, na disciplina química Geral I, sob o enfoque simbólico-matemático da estrutura da matéria e suas transformações, manifestadas por discentes recém-formados no ensino médio, matriculados nos cursos de Engenharia e Geologia na Universidade Federal do Amazonas-UFAM, oriundos de escolas públicas e privadas, da cidade de Manaus. Como resultado, verificou-se que a contextualização e a modelagem são alternativas de ensino que podem se constituir num recurso metodológico que estabeleça uma conexão entre conhecimentos prévios e os científicos, permitindo, aos discentes, articular eficazmente os níveis de representação (macroscópico, submicroscópico e simbólico).

A pesquisa realizada por Santana (2016), intitulada *Matemática aplicada à química* foi feita uma revisão teórica tanto de matemática quanto de química precedendo cada aplicação para facilitar um melhor entendimento: Matemática básica aplicada à química; Matemática do Ensino médio aplicada à química; Matemática ao ensino superior aplicada à Química.

De acordo com o exposto, nível escolar superior apresenta quatro produções acadêmicas, sendo distribuídas em duas teses de doutorado e duas dissertações de mestrado. O Ensino médio é o nível com seis produções de dissertações de mestrado produzidas com a temática proposta pela pesquisa. Ao referirmos sobre as categorias pedagógicas verificou-se que apenas uma tese de doutorado abordou o aspecto de

Currículo. Ao relatar sobre caracterização do professor, apresentou apenas uma tese de doutorado. No que tange, o Conteúdo e Método foram contemplados com as oito produções de dissertações de mestrado.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este presente trabalho oferece ao leitor uma visão do cenário de uma parte relevante da produção acadêmica brasileira sobre a interdisciplinaridade do Ensino de Matemática e o Ensino de Química no período de 2003 a 2017 no que se refere as pesquisas oriundas das dissertações de mestrado e teses de doutorado dos publicados nos Catálogos CAPES e Biblioteca Digital de Teses e Dissertações.

Observamos a existência de um número modesto de produções acadêmicas nas regiões Sul, Nordeste, Sudeste e Norte. Em contrapartida, a região Centro-Oeste não apresentou nenhuma produção. Porém, o número de pesquisas que vem crescendo no decorrer dos anos. Devido a este fato, sinaliza-se a necessidade de realização de trabalhos mais completos e aprofundados sobre o assunto. Na organização da produção em relação ao nível escolar, verificamos que os resultados mostram que o Ensino Médio é o mais privilegiado. Diante desse produto, indica a indispensabilidade de investigações voltadas aos três demais níveis de ensino. Com relação aos aspectos pedagógicos, Conteúdo e Método se destacam pela quantidade de produções acadêmica relevando sua grande relevância, no que diz a respeito à prática pedagógica dos professores de Matemática e Química que articulam condições, propostas pedagógicas representando um papel fundamental na interação com os alunos no processo de ensino-aprendizagem de forma interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, Carlos Eduardo Pereira. **Contribuição da Contextualização de Modelagem do O Enfoque Simbólico-Matemático no Processo de Ensino-Aprendizagem a Estequiometria**. Manaus: UFAM, 2017. Dissertação (Mestrado em Educação), -Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade do Amazonas – Manaus, 2017.

BARBOSA, Anne Karoline Assis. **(A inter) Relação da Matemática e a Química:** Uma visão Pontual de Alunos do 1ºano do Ensino Médio**.** Foz do Iguaçu: UNILA, 2016.Especialização (Ensino de Ciências e Matemática para séries finais: Ensino Fundamental 6ª ao 9º) – Programa de Pós-graduação Universidade da Integração Latino Americana, Foz Iguaçu, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

________. Ministério da Educação. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Volume 2. Brasília: MEC/ SEB, 2008

________. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/ SEB, 2018.

Catálogo de Teses e Dissertações. Disponível em <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/> Acesso em: 10 de janeiro de 2019.

CIRINO, Marcelo Maia**. A Intermediação da Noção de Probabilidade na Construção de Conceitos à Cinética Química no Ensino Médio**. São Paulo: UNESP, 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação Universidade Estadual de São Paulo, 2007.

Biblioteca Digital de Teses e Dissertações. Disponível em: <http://bdtd.ibict.br/vufind/> Acesso em 10 de janeiro de 2019.

FAZENDA, Ivani Catarina Arantes. **Interdisciplinaridade**: Um projeto em Parceria. 5.ed. Loylola: Rio de Janeiro, 2002.

FONTES, Felipe Augusto Martinazzo. **Aprendizagem de funções por meio da modelagem matemática:** um estudo do comportamento de um composto químico. Sorocaba: UFSC,2014. Dissertação(Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de Santa Catarina, 2014.

GARCEZ, Edna Sheron da Costa. **O Lúdico em Ensino de Química**: Um Estudo Estado da Arte**.** Goiânia: UFG, 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Goiás, 2014.

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e Patologias do Saber**. Rio de Janeiro: Imago,1976.

LEMOS, Paulo Giovane Aparecido. **Funções aplicadas a F**ísica e Química. Juiz de Fora: UFJF,2013. Dissertação (Mestrado Profissional) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática, Universidade de Juiz de Fora, 2013.

LUDKE, Menga e ANDRE, Marli. **Pesquisa em Educação:** Abordagens Qualitativas. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1986.

MARANHÃO, Roquelany Batista. **O laboratório de ciências da natureza**: uma proposta interdisciplinar para professores de matemática do segundo ano do ensino médio. Fortaleza: UFC, 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, 2015.

SANTANA. José Ernandes Oliveira de. **Matemática aplicada à química.** Fortaleza: UFC, 2016. Dissertação (Mestrado Profissional) - Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, 2016.

SAHÃO. Maria Helena Sebastiana. **Matemática na Formação do Químico Contemporâneo**. São Paulo: UNESP, 2003. Tese (Doutorado) - Pós-Graduação da Universidade Estadual de São Paulo, 2003.

SELINGARD. Ainá Montessanti. **O estudo da função afim no ensino médio com apoio de uma atividade experimental.** São Carlos: UFSCar, 2015. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, 2015.

SILVA, Lourival Gomes da. **Concepções de Professores de Matemática e Química sobre a Avaliação de Aprendizagem:** Um Estudo de Caso em um Curso de Licenciatura Plena. Rio Grande do Sul: UFRGS, 2017. Tese (Doutorado) – Programa de Pós- Graduação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2017.

PIMENTEL. Zoriane Soares Pereira. **Sobre a importância da matemática aplicada:** analise de conteúdos programáticos nos planos de ensino dos cursos de licenciatura em ciências da natureza, biologia e química. Porto Alegre: UFRGS, 2015. Dissertação (Mestrado)- Programa de Pós- Graduação Educação em Ciências Química da Vida e Saúde, Universidade Federal do Rio Grande do Sul,2015

CAPÍTULO 14

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO DA ÁLGEBRA

Data de aceite: 17/02/2021

Wanderlei Veríssimo
Faculdade de Ensino Superior de São Miguel do Iguaçu – FAESI.

Thiago Fanelli Ferraiol
Universidade Estadual de Maringá - UEM.

RESUMO: Este trabalho tem como objetivo apresentar aos colegas de profissão a Investigação Matemática como metodologia de ensino, e relatar uma aplicação dessa metodologia com alunos de um colégio. As investigações matemáticas envolvem de forma natural o desenvolvimento de conceitos, elaboração de procedimentos e de representações matemáticas, levando o estudante a um processo de construção da matemática, o que tende a elevar o espírito investigativo entre os alunos e o gosto pela descoberta. Para isso, elencamos algumas atividades que envolvem a exploração do conteúdo de álgebra através de problemas curiosos e de questões adaptadas das Olimpíadas Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Destacando que neste trabalho apresentaremos somente uma dessas atividades com análise dos dados. Observamos que, apesar de apresentarem dificuldades iniciais com relação ao desenvolvimento da investigação, os alunos conseguiram melhorar o raciocínio e a percepção quanto à construção de um caminho para resolução de situações-problemas, deixando de lado, mesmo que timidamente, o vício de recorrer sempre a uma fórmula matemática e à ajuda do professor, passando a tentar criar suas próprias estratégias para investigação das situações propostas.

PALAVRAS - CHAVE: Investigação Matemática. Álgebra. Ensino-Aprendizagem.

ABSTRACT: This work aims to introduce mathematical research as a teaching methodology to professional colleagues, and to report an application of this methodology with students from a school. Mathematical investigations naturally involve the development of concepts, elaboration of procedures and mathematical representations, leading the student to a process of construction of mathematics, which tends to elevate the investigative spirit among students and the taste for discovery. For this, we list some activities that involve the exploration of algebra content through curious problems and questions adapted from the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools (OBMEP). Highlighting that in this work we will present only one of these activities with data analysis. We observed that, despite presenting initial difficulties in relation to the development of the investigation, the students managed to improve their reasoning and perception regarding the construction of a way to solve problem situations, leaving aside, even if timidly, the addiction to always resort to a mathematical formula and the help of the teacher, trying to create their own strategies for investigating the proposed situations.

KEYWORDS: Mathematical Research; Algebra; Teaching-Learning.

1 | INTRODUÇÃO

A Matemática, de acordo com Carl B. Boyer, "é um aspecto único do pensamento humano'' (BOYER, 2012). A partir desse posicionamento, buscamos destacar neste trabalho uma prática pedagógica ou (tendência de ensino-aprendizagem) chamada de *Investigação Matemática*, que de certa forma busca um alinhamento entre o sentido da matemática enquanto construção humana e como prática pedagógica. Pretendemos explorar a construção e o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir de uma sequência de atividades sobre situações problemas que envolvem o campo da álgebra. Porém, será relatada apenas uma destas atividades que foi aplicada aos alunos. Nosso objetivo é o de apresentar para colegas professores uma alternativa ao ensino tradicional expositivo através de um material de fácil compreensão com direcionamentos das práticas didáticas. Destacamos de antemão que as atividades envolvendo investigação matemática não são a chave para resolver todos os problemas do ensino e aprendizagem da álgebra, mas como um caminho estratégico, promissor e com potencial para um bom embasamento conceitual. O objetivo principal é fazer com que o estudante, através de suas próprias estratégias, consiga fazer descobertas de propriedades matemáticas sem o vício de utilizar sempre fórmulas prontas. Além disso, esta metodologia deverá propiciar outras formas de relacionamento interpessoal nas aulas de matemática, incentivando e promovendo a realização de trabalhos colaborativos.

2 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Os educadores matemáticos têm buscado por metodologias alternativas para o ensino da Matemática e seus conteúdos, tentando de várias maneiras fazer com que seus alunos simpatizem mais por essa disciplina escolar e consigam aprendê-la com naturalidade, sem odiá-la e sem superestimá-la.

No âmbito escolar, a Matemática é uma disciplina que, muitas vezes é apresentada e ensinada aos alunos de forma rude, autoritária, sem abertura para diálogos e questionamentos, e ainda, sem fazer referência à sua história. Priorizam-se as regras, procedimentos e técnicas, tornando-se uma atividade mecânica em detrimento de uma reflexão acerca das ideias matemáticas, de sua construção e da percepção de significados para os algoritmos utilizados. Um dos campos da matemática que mais sofre com essa crítica é a álgebra. Ela é uma das áreas que mais representa um paradigma dogmático e mecanicista que se instaurou no ensino de matemática. Como consequência, podemos observar situações bizarras, como alunos capazes de operar com símbolos matemáticos sem, contudo, darem o menor significado para tais operações. Também há dificuldades relativas a não compreensão das próprias técnicas algébricas, aliadas ao não entendimento dos conceitos. Essas questões podem ser originárias de metodologias que, em certa

medida, escondem a natureza da matemática e os processos de criação e generalização do conhecimento matemático.

Sobre o ensino da álgebra e as concepções da Educação Algébrica que se manifestaram ao longo da história, Fiorentini, Miorin e Miguel (1993, p. 83) destacam três tendências: a *linguístico-pragmática*, caracterizada pelo transformismo algébrico, ou seja, por uma sequência de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passando pelas operações presentes nessas expressões, chegando às equações, para finalmente utilizá-las na resolução de problemas; a *fundamentalista-estrutural* que atribui à Álgebra o papel de fundamentar os vários campos da Matemática escolar e; a *fundamentalista-analógica* que tenta efetuar uma síntese entre as duas anteriores, procurando justificar certas passagens do transformismo algébrico através de recursos analógicos geométricos e visuais, mostrando ao aluno uma visão mais concreta, especialmente no tocante à Álgebra Geométrica, através da utilização de leis de equilíbrio físico, recorrendo a balanças, gangorras, etc.

De acordo Fiorentini, Miorin e Miguel (1993, p. 85), o ponto comum e pedagogicamente negativo dessas três tendências é o de enfatizar as características procedimentais, centradas na aplicação de regras e manipulação de expressões algébricas em prejuízo dos aspectos conceituais e semânticos, que exploram os significados e a compreensão dos conceitos. Pode-se também resumir que, as Concepções de Educação Algébrica dominantes, ao longo da história do Ensino da Matemática, enfatizam o ensino de uma linguagem algébrica já constituída, em detrimento da construção do pensamento algébrico e de sua linguagem.

A partir das dificuldades de aprendizagem dos alunos e a dificuldade de ensinar dos professores, há a necessidade de repensar a Educação Algébrica. É provável que tais dificuldades estejam fundamentalmente assentadas na relação que se estabelece entre pensamento e linguagem, posto que a tendência desenvolvida para a educação algébrica é acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve por meio do uso de regras para resolução das atividades algébricas, ou seja, através da linguagem simbólica específica da Álgebra. A análise de situações problemas que envolvem o pensamento algébrico leva a conclusão que não existe uma única forma de expressá-lo. “Ele pode expressar-se através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica” (FIORENTINI, MIORIN E MIGUEL, 1993, p. 88). O pensamento algébrico tem relação com a generalização de padrões, a descrição de situações, de procedimentos. A linguagem algébrica é apenas uma forma de realizar esse pensamento. No nosso entendimento, a linguagem algébrica é uma poderosa ferramenta para o pensamento, proporcionando aos alunos a capacidade de abstração a partir do concreto e, reciprocamente, da análise e síntese de situações concretas a partir de modelos abstratos.

Para contribuir com o ensino e a aprendizagem da álgebra dentro dessa perspectiva

de construção do conhecimento e da linguagem, abordamos a *investigação matemática*. Por que a investigação matemática? "A Matemática não é um esporte para espectadores: não pode ser apreciada e aprendida sem participação ativa" (POLYA, 1985). Esta é a primeira consequência apontada por George Polya para a sua ideia sobre o real objetivo do ensino de matemática, que é "ensinar a pensar". Tal recomendação não significa que os alunos devem resolver problemas em aberto ou descobrir novas relações matemáticas, mas sim ter a capacidade de investigar e argumentar sobre os padrões que observa. Neste caso, não se trata de criar nova matemática para os matemáticos, mas sim fazer a sua própria construção de uma matemática possivelmente já praticada. Conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2013, p. 23), é uma proposta de "atividades de ensino-aprendizagem", que propiciam o "espírito da atividade matemática genuína".

> Em contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso (PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA 2006, p. 09).

Destacam também que: "as investigações matemáticas envolvem naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração". Nessa proposta, como são articuladas diferentes modos de interpretação, o aluno poderá formular questões e conjecturas e realizar suas provas e refutações, além de apresentar os resultados obtidos durante o processo e a discuti-los junto aos demais colegas e ao professor. E este é exatamente o processo de construção da matemática, o que tende a elevar o espírito investigativo entre os alunos. Pois, Investigar significa procurar conhecer o que não se sabe, que é o objetivo maior de toda ação pedagógica (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.10). O que se espera em uma atividade de investigação e exploração, realizada por alunos, é que a Matemática flua naturalmente, isto é, com tentativas de erros e acertos.

A investigação matemática é munida de características próprias. Conforme destacam os autores, Ponte, Brocado e Oliveira (2016, p. 20), a realização de uma investigação matemática em sala de aula envolve quatro momentos principais que são muito importantes para garantir o sucesso da atividade.

1) Exploração e formulação de questões: que incluem as atividades de reconhecer e explorar uma situação problema, formulação de questões;

2) Conjecturas: organizar dados, formular conjecturas e fazer afirmações sobre elas;

3) Testes e reformulação: realizar testes, refinar a conjectura;

4) Justificação e avaliação: justificar uma conjectura, avaliar o raciocínio ou o resultado de um raciocínio. Refere-se à argumentação, à demonstração e a avaliação das conjecturas já realizadas.

Salientando-se que esses quatro momentos podem surgir, muitas vezes, simultaneamente. Como por exemplo, a formulação das questões juntamente com a conjectura inicial, ou a conjectura e o seu teste, etc.

Numa aula de investigação matemática, tudo o que acontece depende dos envolvidos (PONTE, BROCADO E OLIVEIRA, 2016). O professor deve dar a devida atenção à exploração antecipada da tarefa e ao planejamento de como irá ocorrer a atividade em sala de aula. No entanto, planejar não significa determinar todos os caminhos da aula, uma vez que elas se caracterizam por uma grande margem de imprevistos, o que exige do professor uma grande flexibilidade para lidar com situações novas, com grande possibilidade de surgir. O sucesso de um trabalho com investigação matemática depende do ambiente gerado na sala de aula e do envolvimento ativo dos alunos, que é a condição fundamental para a aprendizagem. Além de reconhecer os momentos citadas acima, a maneira com que o professor conduz a atividade faz grande diferença no resultado final. Um dos elementos importantes é, por exemplo, valorizar as ideias dos alunos, uma vez que um dos objetivos é que eles discutam as ideias com seus colegas, sem a necessidade da validação constante por parte do professor. Quando se debruça sobre uma situação problema de investigação para resolvê-la, o aluno pode, além de encontrar a solução desejada, fazer descobertas de outras propriedades que se revelam tão ou mais importantes que a solução original. E, às vezes, mesmo não conseguindo encontrar a solução original, algumas propriedades e descobertas imprevistas aguçam a curiosidade dos alunos, além de mostrar que nem todas as respostas são dadas na matemática, desmistificando a ideia de que ela é uma ciência pronta e acabada.

Conforme Ponte, Brocado e Oliveira (2016, p.48), o professor deve propor desafios aos alunos, e esses desafios deverão propiciar aos alunos um espirito interrogativo perante as ideias matemáticas. A fim de que o ciclo de investigação não se esgote prematuramente, sugerem alguns questionamentos podem colaborar para com os alunos no desenvolvimento das atividades investigativas: -- Como você tentou? -- O que está tentando fazer? -- O que pensa sobre isso? -- Porque está fazendo assim? -- O que você já descobriu? -- Como podemos organizar isto? -- Verificou se funciona mesmo? O professor, neste momento, deve estar bem atento ao desenvolvimento das atividades, expressões, falas dos alunos, pois temos que trazer a nossa discussão os ritmos e estilos de aprendizagem.

Para toda a atividade de investigação realizada há a necessidade de avaliação, seja ela individual ou em grupo. Por conseguinte, o professor deve deixar claro aos alunos o que irá avaliar, quais critérios adotará e como irá fazê-lo, uma vez que as investigações perpassam por diversos objetivos curriculares. Dessa forma, não deixará margem de dúvidas aos alunos.

> Em primeiro lugar, pretende-se que o aluno seja capaz de usar conhecimentos matemáticos na resolução da tarefa proposta. Em segundo lugar, pretende-se que o aluno desenvolva a capacidade de realizar investigações. E, em terceiro

> lugar, pretende-se promover atitudes, tais como a persistência e o gosto pelo trabalho investigativo. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.109).

Como a maioria dessas atividades são desenvolvidas em grupo, constitui-se um grande desafio para o professor perceber todos os momentos de discussão do grupo, o que já produziram com suas anotações, e aonde querem chegar. Há também outras formas de avaliação a considerar durante a realização do trabalho investigativo e na fase de conclusão. O professor poderá colher informações sobre as atitudes dos alunos, tanto na elaboração de questionamentos quanto em afirmações, da forma que mobilizam ideias e o pensamento matemático e fazem sua representação formal. Isso pode ser obtido de forma oral ou através de alguma gravação de suas discussões durante a exploração da atividade, como também através de relatórios de alguma estratégia tentada e abandonada e das conjecturas testadas e/ou rejeitadas.

Não menos importante, há de se considerar uma apresentação oral que constitui uma situação de avaliação e também de aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento da capacidade de comunicação e de argumentação, que pode ser usada tanto de modo individual como em grupo.

> As apresentações orais permitem avaliar uma variedade de objetivos, incluindo as atitudes e valores, a compreensão do processo investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral. A sua principal limitação é o tempo que consomem. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2016, p.105).

Deve-se considerar, no entanto, que este tipo de atividade não pode ser feito com muita frequência, pois se corre o risco de essas apresentações se tornarem cansativas, e assim poderá haver consequências negativas no ambiente de trabalho investigativo em sala de aula.

3 | ASPECTOS METODOLÓGICOS

Como forma de alcançar os objetivos propostos para o ensino-aprendizagem de álgebra, apresentamos algumas possibilidades de aulas através da investigação matemática. No nosso entendimento, existem muitas relações entre esta metodologia e a construção do pensamento algébrico. De fato, ao trilhar o caminho da investigação matemática, o discente se depara com situações nas quais ele deve explorar os problemas para perceber padrões, eventualmente transformando-os em padrões numéricos, que é um embrião do pensamento algébrico, e, em seguida, deve transformar a ideia intuitiva, passando-a dos raciocínios particulares para os genéricos e encontrando uma linguagem para expressá-los coerentemente.

De modo geral, as atividades propostas são de cunho exploratório e tem o objetivo de propiciar ao aluno a oportunidade de fazer suas próprias descobertas. Partimos do

princípio que, ao ingressar no processo de raciocinar livremente a partir da curiosidade e do envolvimento com o problema que se apresenta, sem um comando imperativo do tipo “calcule”, “resolva”, “demonstre”, os alunos adquirem uma maior criatividade e confiança na busca do conhecimento.

No desenvolvimento da parte prática, buscamos apresentar uma sequência de atividades com situações problemas que envolvem o conteúdo de álgebra, em nível crescente de dificuldades, de conhecimento e aprendizagem, no sentido de que as primeiras tarefas podem ser explorados a partir da observação de padrões e de testes de casos particulares, não sendo necessário um raciocínio algébrico mais elaborado. Conforme avançam, as atividades vão permeando situações que requerem raciocínio lógico, abstração, notação algébrica, elaboração de hipóteses, operações matemáticas e suas propriedades, entre outros elementos típicos da matemática. Dentro do processo de investigação também procuramos desenvolver explicações com demonstrações matemáticas, sempre buscando provar a validade de determinadas conjecturas e propriedades que se apresentam duvidosas.

As atividades propostas são questões retiradas e adaptadas da Obmep e seu banco de questões e de algumas situações curiosas do dia a dia, cujo objetivo principal é fazer com que o estudante, através de suas próprias estratégias, consiga fazer descobertas de propriedades matemáticas sem o vício de utilizar sempre fórmulas prontas, ou seja, construir matematicamente soluções a partir de seu próprio raciocínio. As duas atividades selecionadas para este trabalho fazem parte de um grupo de situações-problemas que foram apresentadas em sala de aula para ser desenvolvida pelos alunos, de acordo com o objetivo delineado pelo professor. Uma vez que, após o primeiro contato da atividade pelo aluno e o mesmo não percebe o que precisa fazer, o professor interfere colocando questões desafiadoras, interrogações ou alguma afirmação, que denominamos de “*cartas-na-manga*”, para a exploração mais abrangente da situação. As *cartas-na-manga* são algumas perguntas, hipóteses ou afirmação que permite a continuidade da atividade ou objetiva a dar um novo foco exploratório, possibilitando ao aluno novas descobertas matemáticas. São indagações que tem o interesse de fazer com que o estudante explore relações matemáticas naquele contexto, neste caso, a atividade se torna parcialmente direcionada.

4 | DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

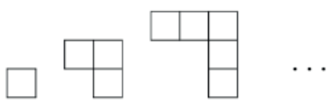
A primeira atividade relatada abaixo, *somando pecinhas*, está somente descrita como foi elaborada e apresentada para os alunos, onde os itens questionados foram feitos um a um, letra (a), letra (b), etc., com um tempo para cada item. Porém não apresentamos a descrição dos resultados apresentados pelos alunos.

Atividade 1: Esta atividade faz parte de um grupo de questões em que procuramos

abordar a generalização de padrões de sequências numéricas. São abordadas atividades de exploração de figuras geométricas que envolvem sequências numéricas. O objetivo delas é fazer com que, através das observações realizadas pelos alunos, eles consigam verificar padrões, conjecturar relações e tenham a percepção de relacioná-los com os conteúdos matemáticos. Além de apresentarem propriedades, soluções e chegar a uma generalização, como a lei de formação da sequência ou da soma de sua série. Mesmo utilizando-se das fórmulas matemáticas para as sequências numéricas PA e PG.

Descrição da atividade: s*omando pecinhas* - Questão retirada e adaptada do Banco de Questões 2016, Nível 1 – Obmep.

Considere a seguinte sequência de pecinhas, em que a pecinha de número 1 é um quadradinho.



a) Desenhe as pecinhas 4 e 5.

b) Quantos quadradinhos formam a pecinha de número 50?

c) É possível saber o número de quadradinhos de qualquer pecinha? Descreva uma regra ou propriedade matemática que permite efetuar esse cálculo.

d) Qual é o número de quadradinhos que se obtém unindo as pecinhas 24 e 25?

e) Quantos quadradinhos existem na união das pecinhas de número 1 a 50?

f) É possível saber a soma dos quadradinhos da união de uma sequencia de pecinhas? De que forma? Descreva.

g) Observando o resultado do item (e), calcule: 2 + 4 + 6 + ... + 96 + 98 + 100.

h) Calcule a seguinte soma: 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100.

Atividade 2: Esta atividade faz parte de um grupo: “Atividades de Investigação sobre Mágicas e Adivinhações - brincando com álgebra”. Neste grupo procuramos trazer algumas brincadeiras com álgebra envolvendo mágicas e adivinhações. Claramente estas atividades deixam os alunos muito curiosos em verificar por que estes casos de adivinhações que envolvem operações matemáticas dão certo. Um dos objetivos será fazer com que os alunos se sintam detetives, investigadores para que descubram um caminho para a o resultado, refazendo e conjecturando a sequência de operações informadas e ainda, apresentar uma solução algébrica que generalize a situação. Outro objetivo é fazer com que percebam as operações matemáticas e suas inversas, como também equacionar algebricamente uma ideia.

Descrição da atividade: *Mágica com Dominós*. O mágico *Magimático* diz para uma pessoa que está na plateia escolher uma peça qualquer de um dominó comum. Tal peça é formada por um par de números de 0 a 6. Em seguida, ele diz para a pessoa escolher um dos números da peça e realizar a seguinte sequência de operações:

1. Multiplicá-lo por 5;
2. Somar o resultado anterior com 15;
3. Multiplicar o último resultado por 2 e, finalmente,
4. Somar o último resultado com o outro número da peça.

Realizadas tais operações, o resultado é divulgado e *Magimático* impressiona a plateia dizendo exatamente os números escritos no dominó escolhido.

a) Escolha uma ou se preferir mais peças, pegue um dos números e efetue as sequências de operações pedidas pelo *Magimático*.

Relato da aplicação da atividade Mágica com Dominós: a atividade apresenta uma sequência de operações matemáticas, cujo objetivo principal é fazer com que o aluno transforme-a em uma sequência algébrica, ou seja, conjecture e desenvolva uma regra geral, fazendo isso estará descobrindo qual é o truque matemático presente na mágica. Alguns resultados apresentados pelos alunos:

"Com esses três resultados podemos concluir que há uma sequência onde 0 (zero) corresponde ao 30; 1 ao 40; 2 ao 50; 3 ao 60; 4 ao 70; 5 ao 80 e 6 ao 90, ou seja, ele decora a sequência e substitui no resultado. Exemplo, se o resultado for 34 ele vai chegar a conclusão de que um dos números é 0 (30) e o outro é 4 (último termo).

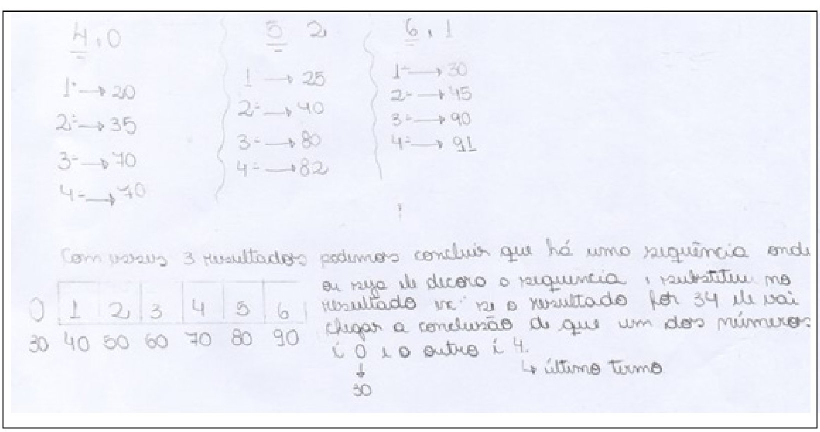


Figura 1 – entendendo o truque

Um grupo de alunos do 4º ano do curso de Formação de Docentes, após se empolgarem com a atividade e alguns testes, alguém registrou as conclusões tiradas, conforme figura 21, abaixo: "ao realizar as operações o magico saberá qual peça foi

escolhida, pois ao chegar ao resultado final é só subtrair o resultado por 30”. Apresenta-se também a forma da expressão algébrica desenvolvida, com a seguinte explicação: “no terceiro passo multiplica-se 2.15 = 30.” Se essa etapa não estivesse na equação chegaríamos ao resultado da peça sem precisar subtrair o número 30 no final. A equação ficaria assim: $10x + y$.

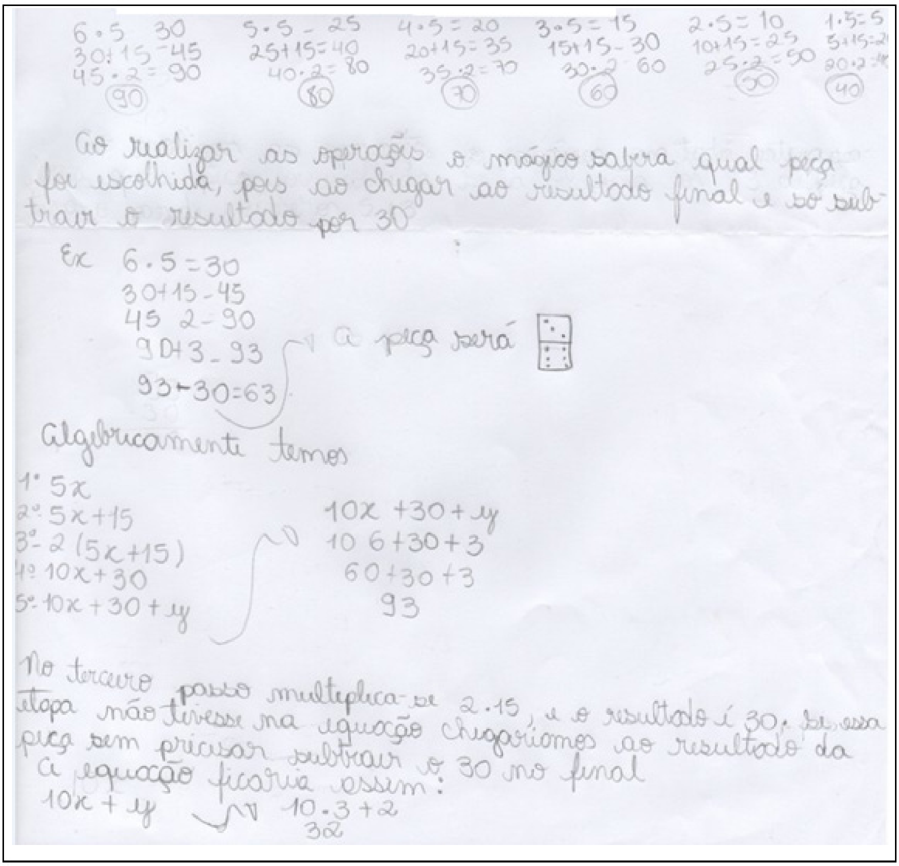


Figura 2 – expressando algebricamente o truque de mágica

Após a atividade aplicada dessa maneira, foi apresentada outra folha com a mesma atividade, agora com mais questões a serem respondidas.

b) Sabendo que o resultado foi 62, como o mágico descobriu o número escolhido pelo membro da plateia?

c) Tem como o resultado ser 48?

d) Se o resultado tivesse sido n, como descobrir os números da peça escolhida?

e) Tem como o resultado ser menor que 30?

f) Descreva qual é a mágica usada pelo *Magimático*?

Ao fim da atividade, os alunos chegaram à conclusão que a mágica poderia ser construída com outra sequência de números, porém preservando a multiplicação por 2 e por 5, ou seja, por 10. O que poderia ser diferente é o passo 2, somar 15 ao resultado anterior. A partir daí, o dobro deste número é que deveria ser subtraído do resultado para saber quais peças o expectador escolheu.

As atividades desenvolvidas neste grupo foram consideradas satisfatórias pelos resultados apresentados. Mesmo esbarrando em algumas condições desfavoráveis para o desenvolvimento da atividade, tais como: sala de aula numerosa, alunos sem interesse e individualistas, pouco tempo e professor com pouca experiência para este tipo de metodologia. Mesmo assim, os discentes, à sua maneira, conseguiram discutir e expressar algebricamente expressões que descrevem as situações genericamente, atingindo assim o objetivo proposto.

Sobre as condições desfavoráveis citadas acima, enfatizamos que em toda atividade em grupos proposta em sala de aula, sempre haverá contratempos para o professor. Ponte (2003, p.12), afirma que, as tarefas de exploração e investigação assume um papel importante na sala de aula, se o professor pretende que os alunos desenvolvam plenamente as suas competências matemáticas. Segundo ele,

> [...] O interesse destas tarefas é por vezes desvalorizado com diversos argumentos: (i) a maior parte dos alunos não tem qualquer interesse por realizar explorações ou investigações matemáticas; (ii) os alunos têm dificuldade em perceber como investigar; (iii) antes de poderem investigar os alunos têm de aprender muitos conceitos e procedimentos básicos; e (iv) a actividade do aluno e a do matemático são necessariamente muito diferentes, porque não se pode comparar um profissional especializado, que trabalha em coisas que lhe interessam, com uma criança ou um jovem, que tem uma dúzia de disciplinas para estudar, e que o faz coagido pelo sistema de ensino. (PONTE, 2003, P.12).

Nesse sentido, reiteramos o quão importante é o papel do professor como: produtor – fazer um bom planejamento, mediador e avaliador de uma atividade de investigação em dala de aula.

5 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia de investigação matemática é riquíssima para o ensino e aprendizagem de alguns conteúdos matemáticos. Este tipo de atividades de natureza exploratória tende a dar sentido no estudo que o aluno está realizando, dessa forma ele passará a ter mais afeto por essa disciplina escolar que é desinteressante para a maioria dos estudantes, por não verem, muitas vezes, nenhum sentido real. Dessa forma as atividades que foram desenvolvidas, tem o objetivo principal de contribuir para remediar essa lacuna, constituindo assim uma didática importante com a possibilidade de ser utilizada por outros colegas professores. Alguns aspectos mais relevantes neste tipo de metodologia são o alcance e a

importância da dimensão colaborativa. Os alunos quando se envolve no desenvolvimento da atividade exploratória se tornam verdadeiros pesquisadores, as discussões que são travadas para defender suas ideias faz com que ampliem seu campo de visão a respeito de conceitos matemáticos, permitindo ao aluno desenvolver relações matemáticas, contribuir para amadurecer ideias em um ambiente colaborativo, conjecturar situações e generalizá-las.

Quanto à abordagem algébrica, observamos que os alunos, através das atividades de investigação, conseguiram desenvolver e expressar o pensamento algébrico, à sua maneira, decorrente de cada situação apresentada, isto é, o que fazia sentido naquele momento. Isso leva o aluno a ter uma visão diferente da álgebra e não apenas ver uma álgebra como um amontoado de símbolos e regras, sem muito sentido por serem expressões vazias de manipulações mecânicas.

Algo muito positivo que foi possível observar e está bem presente no desenvolvimento das atividades, de acordo com os autores citados neste trabalho, é a construção do pensamento algébrico, bem como a implicação pedagógica de natureza didático-metodológica, que se refere às grandes etapas da Educação Algébrica elementar: expressar simbolicamente uma situação-problema concreta; a partir de uma expressão algébrica atribuir-lhe alguns significados concretos e vice-versa; transformar uma expressão algébrica em outra equivalente. Além de expressar algebricamente situações a fim de generalizá-las. Os aspectos negativos observados na aplicação desta metodologia foram: a deficiência dos alunos em compreender e interpretar o enunciado de algumas questões propostas; a superficialidade ou falta de noção de alguns conteúdos matemáticos básicos; falta de confiança e criatividade para elaborar alternativas de resolução; desinteresse em discutir a atividade com os colegas; além da falta de experiência do professor com este tipo de metodologia. Nesse sentido, a atuação do professor, enquanto mediador deste tipo de atividade é o diferencial na construção do conhecimento. Seu papel é de extrema relevância no processo de ensino e aprendizagem, pois através de atividades de cunho investigativo adequadas, permite que o aluno seja motivado à discussão, ao confronto de ideias e, dessa forma, gerar seu próprio conhecimento. Por fim, destacamos que a aplicação da metodologia de investigação matemática apresenta grande potencial para o ensino da álgebra, mas não é solução geral, ela também tem seus limites. A sua utilidade depende dos objetivos que se quer alcançar, pois nem tudo se pode ensinar ou aprender através da investigação. No entanto, é uma poderosa ferramenta para a construção do conhecimento, tem suma importância para os docentes e discentes na promoção do ensino e aprendizagem matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. **Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementa**r. Pro-Posições, nº 2, pp. 25-39,1993.

POLYA, George. **O ensino por meio de problemas**. Revista do professor de matemática, vol. 7, pp. 11-16, 1985.

PONTE, João Pedro da. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat, pp. 25-39, 2003.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

CAPÍTULO 15

DIFICULDADES E PERSPECTIVAS DOS ACADÊMICOS DO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DO IFNMG CAMPUS JANUÁRIA

Data de aceite: 17/02/2021

Data de submissão: 07/12/2020

Gustavo Pereira Gomes
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/5378086075565395

Bianca Menezes Campos
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais
Januária – Minas Gerais
http://lattes.cnpq.br/0276975053885663

RESUMO: Este trabalho tem como objetivo identificar as dificuldades e perspectivas dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais (IFNMG) campus Januária. Tal pesquisa foi realizada durante o segundo semestre de 2016 através de um questionário, abordando temas sociais e escolares, aplicado a aproximadamente 55% do total dos alunos matriculados no mesmo semestre. Os dados mostram que 95% dos acadêmicos pesquisados já encontraram dificuldades no processo de ensino e aprendizagem durante a graduação, sendo que a principal dificuldade citada foi a mudança do habito de estudo e a medida adotada com maior frequência para superar estas dificuldades é o estudo em grupo. Além disso, apenas três alunos escolheram o curso por desejar seguir carreira docente, apesar de que 79% pretendem fazer pós-graduação, dos quais, a maioria almeja seguir na área da Educação Matemática. Assim, percebe-se que este tipo de pesquisa é imprescindível, possibilitando aos docentes que conheçam os alunos ali inseridos para aperfeiçoar suas práticas pedagógicas.

PALAVRAS - CHAVE: Matemática. Perspectivas. Dificuldades.

DIFFICULTIES AND PERSPECTIVES OF THE ACADEMICS IN THE MATHEMATICS DEGREE COURSE OF IFNMG CAMPUS JANUÁRIA

ABSTRACT: This work aims to identify the difficulties and perspectives of students in the Mathematics Degree course at the Instituto Federal do Norte de Minas Gerais (IFNMG) campus Januária. This survey was conducted during the second semester of 2016 through a questionnaire, approaching social and school topics, applied to approximately 55% of the total students enrolled in the same semester. The data show that 95% of the academics surveyed already lose difficulties in the teaching and learning process during graduation, with the main difficulty cited for changing the study habit and the measure most frequently adopted to overcome the difficulties being group study. Furthermore, only three students chose the course because they wanted to a teaching career, despite the fact that 79% intend to pursue graduate studies, of which, most of them aim to follow in the area of Mathematics Education. Thus, it is clear that this type of research is essential, enabling teachers to get to know the students there to improve their pedagogical practices.

KEYWORDS: Mathematics. Perspectives.

Difficulties.

1 I INTRODUÇÃO

O curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG campus Januária foi iniciado no ano de 2007, através da resolução CD Nº 10, com funcionamento nos turnos vespertino e noturno e entrada de 40 novos alunos por ano, sendo que o principal objetivo do curso, citado no Projeto Pedagógico, é formar professores para o exercício do magistério na Educação Básica (segunda fase do Ensino Fundamental e Ensino Médio) em Matemática e, durante os anos de 2007 e 2010, o projeto do curso sofreu algumas mudanças, visando o bom andamento do mesmo, conforme dados retirados do Projeto Pedagógico.

Observa-se frequentemente, inclusive no IFNMG/Januária, que a falta de interesse em lecionar é grande, principalmente no ensino básico, devido a muitos fatores sociais, profissionais e pessoais, contribuindo para o desafio da formação de professores qualificados, como afirma Oliveira (2004, p. 1132)

> Muitas vezes esses profissionais são obrigados a desempenhar funções de agentes público, assistente social, enfermeiro, psicólogo, entre outras. Tais exigências contribuem para um sentimento de desprofissionalização, de perda de entidade profissional, da construção de que ensinar às vezes não é o mais importante.

Para atingir o objetivo do curso é imprescindível conhecer o nível, perfil e expectativas profissionais dos acadêmicos. O desconhecimento destes fatores prejudica o relacionamento do professor e aluno, podendo elevar a taxa de evasão e reprovação em algumas disciplinas. Buscando investigar os questionamentos levantados, foi proposto a realização do projeto de pesquisa intitulado: “Perfil e perspectivas dos acadêmicos no curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais (IFNMG) Campus Januária” que teve como objetivo principal analisar o perfil dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG campus Januária com uma abordagem quantitativa e qualitativa, destacando as perspectivas profissionais dos mesmos. Melo (2010, p. 42) ressalta que pesquisas deste gênero possibilita que os docentes conheçam o perfil dos alunos ali inseridos e, consequentemente, aperfeiçoem suas práticas pedagógicas.

Além disso, uma pesquisa realizada por Alkimim e Leite (2013) sobre evasão no curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG campus Januária mostra que evadiram 116 alunos entre os anos de 2007 e 2012, revelando a importância de conhecer as dificuldades dos estudantes para que a instituição possa dar um suporte maior aos alunos.

2 I REFERENCIAL TEÓRICO

O ensino da Matemática do Brasil tem sido alvo de muitas pesquisas nos últimos anos devido ao alto índice de evasão do curso, a falta de interesse em lecionar e as dificuldades apresentadas pelos discentes. O movimento Todos pela Educação realizou um estudo no ano de 2013 e revelou que apenas 10% dos estudantes brasileiros que concluem o Ensino Médio sabem Matemática. Isto nos revela que a maioria dos ingressantes na vida acadêmica na área de exatas está despreparada.

Nasser (2007, p. 6) afirma que "parece que os alunos chegam à Universidade com preguiça de raciocinar e que foram acostumados apenas a aplicar algoritmos, procedimentos e fórmulas decoradas, sem saber bem o que estão fazendo e porque adotam determinado procedimento". A autora ainda salienta que grande parte dos alunos não tem a prática de justificar suas ideias e procedimentos e por isso não se familiarizam com o raciocínio lógico-dedutivo e nem com as demonstrações. Os alunos ao chegarem ao ensino superior e se depararem com o ritmo de ensino diferente, podem se sentir perdidos e frustrados.

Além disso, Alkimim e Leite (2013) ao realizarem uma pesquisa sobre evasão no curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG campus Januária, relataram que no período de 2007 a 2012, evadiram 116 alunos, o que nos revela um alto índice de evasão no curso de Licenciatura em Matemática da referida instituição. Ao mesmo tempo, a carência de professores qualificados já é um problema atual do governo, pois foi implantado pelo Ministério da Educação, em 2009, o Plano Nacional de Formação de Professores, que tem como objetivo formar professores que já estão em exercício, mas que ainda não têm formação na área de atuação ou não possuem curso de educação superior completo.

> O Plano Nacional de Formação é destinado aos professores em exercício das escolas públicas estaduais e municipais sem formação adequada à LDB, oferecendo cursos superiores públicos, gratuitos e de qualidade, com a oferta cobrindo os municípios de 21 estados da Federação, por meio de 76 instituições públicas de educação superior, das quais 48 federais e 28 estaduais, contando também com a colaboração de 14 universidades comunitárias. Por meio deste plano, o docente sem formação adequada poderá graduar-se nos cursos de primeira licenciatura, com carga horária de 2.800 horas mais 400 horas de estágio para professores sem graduação, de segunda licenciatura, com carga horária de 800 a 1.200 horas para professores que atuam fora da área de formação e de formação pedagógica, para bacharéis sem licenciatura. Todas as licenciaturas das áreas de conhecimento da educação básica serão ministradas no plano, com cursos nas modalidades - presencial e a distância (BRASIL, 2009).

Com tais índices de reprovação, a carência de professores qualificados, especialmente na área de Matemática pode ser tornar mais acentuada, prejudicando ainda mais o ensino de matemática na educação básica do país. Tais fatos evidenciam como é importante conhecer o perfil dos estudantes que atualmente pertencem a esse curso, para que se busquem alternativas para tentar reverter esse quadro.

3 | METODOLOGIA

O levantamento das informações teve por base a aplicação de um questionário a 58 alunos voluntários (55% do total de matriculados no segundo semestre de 2016) do curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG do 1º, 3º, 5º e 7º período. O questionário abordou temas sociais, escolares, acadêmicos, perspectivas futuras e sobre o ensino da Matemática na instituição. Posteriormente, os dados foram analisados por meio de tabelas e gráficos de modo a fornecer informações que permitam conhecer os acadêmicos ali inseridos.

4 | RESULTADOS

Os resultados obtidos mostram um equilíbrio entre o número de acadêmicos do sexo feminino e masculino e, em relação à idade, há uma certa diversidade, porém ainda prevalece a maioria de alunos com até 28 anos, com apenas 15 alunos possuindo mais de 28 anos. Destaca-se também que 36 dos alunos pesquisados residem na cidade de Januária e aproximadamente 20% residem no município de Cônego Marinho.

Os dados revelam que aproximadamente 87% dos entrevistados cursaram a maior parte do Ensino Médio em escolas estaduais, sendo que 62% afirmam que não tiveram dificuldades na disciplina de Matemática durante este período escolar. Por outro lado, 66% acreditam que a Matemática aprendida no Ensino Básico não os preparou para a graduação, ou seja, os próprios alunos têm consciência de que o ensino recebido no ensino Básico foi insuficiente para prepará-los para o curso de exatas.

A grande maioria dos entrevistados (72%) responderam que apresentaram dificuldades em conteúdos básicos quando estudados no Ensino Superior, sendo funções e geometria os conteúdos mencionados como os mais difíceis, cada um citado 19 vezes.

Quando questionados em relação à Matemática do Ensino Superior, aproximadamente 95% dos alunos responderam que já encontraram dificuldades, sendo que destes alunos, a principal dificuldade encontrada foi a mudança de hábito de estudo (21 citações), sendo que as três disciplinas que eles encontraram mais dificuldades foram: Geometria Euclidiana (18 citações), Fundamentos da Matemática (16) e Cálculo Diferencial e Integral (15). Além disso, podemos destacar que as disciplinas Geometria Euclidiana e Fundamentos da Matemática, as mais citadas acima, são revisões de conteúdos vistos no Ensino Básico tratadas apenas com um maior rigor matemático, o que nos remete a refletir sobre a qualidade do Ensino Básico no Brasil. O Gráfico 1 a seguir apresenta as disciplinas citadas com o maior índice de dificuldade pelos acadêmicos.

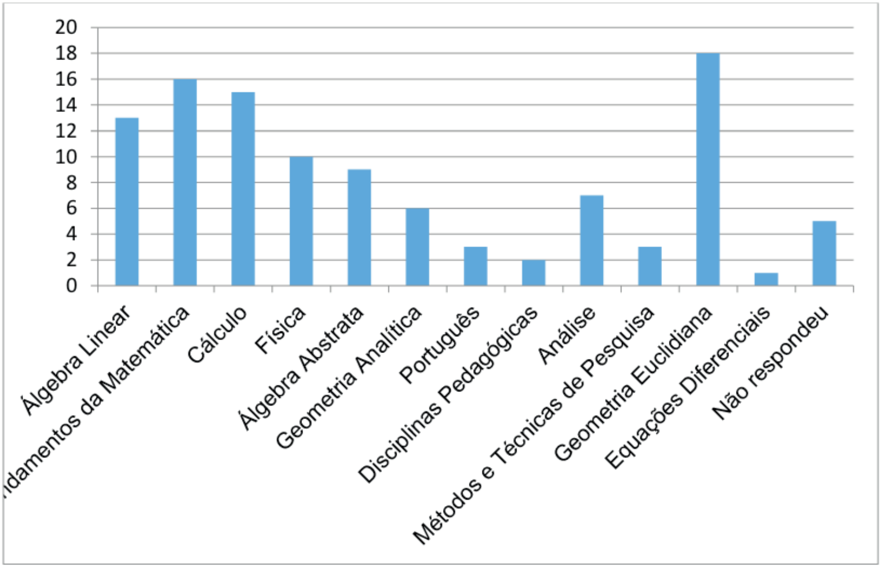


Gráfico 1: Disciplinas que os alunos apresentaram maiores dificuldades

Além disso, 95% dos alunos responderam que já encontraram algum tipo de dificuldade durante o processo de aprendizagem, sendo as principais: a) mudança de hábito de estudo (47%); b) conteúdo é difícil (28%); dificuldade em conciliar o estudo e trabalho (24%); c) metodologia utilizada pelo professor (24%), destacando que os alunos poderiam indicar mais de uma alternativa.

Estes dados reforçam que a Educação Básica não tem preparado a maioria dos alunos para o Ensino Superior e, ao mesmo tempo, indicam que é preciso elaborar alternativas metodológicas de ensino que contribuem no processo de aprendizagem. Porém, é preciso esclarecer que grande parte dos alunos participantes da pesquisa cursavam o primeiro semestre do curso, o que justifica uma quantidade considerável de disciplinas desse período. Também, destaca-se que as disciplinas Geometria Euclidiana e Fundamentos da Matemática, as mais citadas acima, são revisões de conteúdos vistos no Ensino Básico tratadas apenas com um maior rigor matemático.

Ainda em relação ao gráfico, as principais atitudes tomadas pelos estudantes para sanar as dificuldades foram: a) recorrem ao estudo em grupo (43%); b) utilização da internet (19%); participação em monitorias (16%). Dentre as consequências que essas dificuldades podem originar, as mais citadas foram: a) desejo de dedicar mais ao curso e superar as dificuldades (50%); b) desistir do curso (24%); desejo de transferir para outro curso (14%).

Ressalta-se que metade dos alunos desejam superar as dificuldades indicadas, contudo, um alto índice de alunos pretende desistir ou transferir de curso, o que nos remete ao problema da evasão no curso de Licenciatura em Matemática, podendo ocasionar a falta

de profissionais capacitados no mercado de trabalho.

Foi questionado aos acadêmicos qual o principal motivo que os levou a escolher ao curso de Licenciatura em Matemática e apenas três dos alunos pesquisados responderam que foi pelo desejo de seguir a carreira docente. Isso revela que a falta de professores no mercado não depende exclusivamente da formação, mas também do interesse dos formandos em licenciatura atuarem como professores, como afirma Vieira (2009). Todavia, 47% dos alunos responderam que escolheram o curso de Matemática por afinidade.

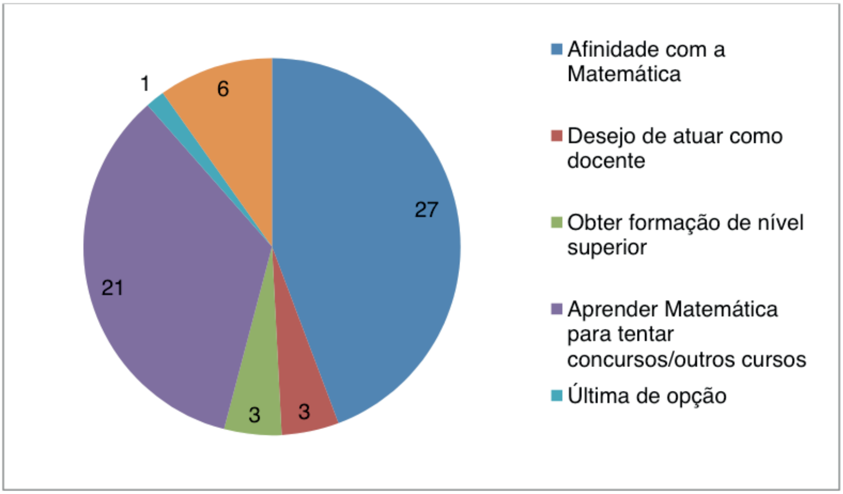


Tabela 1. Principais motivos citados pelos alunos para a escolha do curso de Licenciatura em Matemática do IFNMG.

Todavia, 79% dos alunos desejam continuar seus estudos após a graduação, sendo que as áreas de interesse da Matemática mais citadas são: Educação Matemática (21 citações), Matemática Aplicada (15) e Matemática Pura (4). Além disso, 86% demonstraram interesse em participar de grupos de estudo ligados a Matemática Pura ou Aplicada, ou seja, a maioria dos alunos pesquisados pretende se qualificar. Destaca-se ainda que 53 alunos consideram que a instituição os incentiva a seguir na carreira docente e grande parte dos alunos do curso participa do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), ajudando muitos deles a continuarem no curso, seja pela ajuda financeira ou pelo incentivo do seguimento na carreira docente.

5 I CONCLUSÃO

De acordo com a pesquisa desenvolvida, 66% deles confirmam que a Matemática aprendida no Ensino Básico não os capacitam para a Matemática aprendida no Ensino

Superior, apesar da maioria dos alunos alegarem não encontrar dificuldades em relação a Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

Esse resultado não é algo exclusivo dessa instituição de ensino, visto que Gonçalves (2007) ao realizar uma pesquisa com 211 alunos de diversos cursos da UNILASALLE verificou que a maioria dos acadêmicos afirmou não ter tido dificuldades com a matemática no ensino médio, porém também afirmaram que a matemática do ensino médio não os capacitou para o ensino superior, visto que mais de 70% dos alunos possuem dificuldades com as disciplinas da graduação.

Além disso, 87% dos alunos cursaram a maior parte do Ensino Médio em escola estadual. Esse fato nos faz refletir sobre a qualidade do ensino de matemática nas escolas públicas, visto que ao analisar os dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica-SAEB de 2003, Menezes (2007, p.1) afirma que "os alunos das escolas privadas têm um desempenho melhor do que os alunos das escolas públicas, mesmo após levarmos em contar todas as variáveis familiares". Ademais, os dados divulgados do SAEB 2015 pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) mostram que a proficiência média em Matemática no ensino médio foi de 267, número que reflete o pior resultado desde 1995.

Estes dados estão interligados, pois, atualmente, o ensino nas escolas estaduais passa por muitas dificuldades, ocasionando um ensino insuficiente. Gazire (2006), afirma que os alunos estão acostumados a um ritmo tradicional de ensino onde o professor é o detentor do saber e tem a obrigação de passá-lo pronto e acabado.

Por outro lado, os dados indicam que a principal dificuldade encontrada é a mudança do ritmo de estudo cobrado no Ensino Superior, onde o aluno deve ter o hábito de estudo contínuo, aprofundado e autônomo, exigindo um tempo maior comparando com o Ensino Básico.

No entanto, um dado surpreendente mostra que apenas três dos alunos participantes da pesquisa pretendem dedicar-se a docência, ou seja, a profissão de professor não é atrativa e se encontra desvalorizada. Confirmando esse fato, Louzano et al (2010) afirma que em média os salários dos professores com nível superior são menores do que os dos outros profissionais, além de que soma-se a baixa remuneração o baixo status social da carreira, fazendo com que os alunos com maiores rendimentos no ensino médio não se sintam atraídos por essa profissão, diferentemente dos países com altos desempenhos, onde a carreira docente é uma das mais almejadas pelos estudantes. Porém, 79% desejam se qualificar após a graduação, mostrando que os alunos possuem a consciência da importância de se qualificarem para aperfeiçoar o conhecimento adquirido durante a graduação.

REFERÊNCIAS

ALKIMIN, M. E. F.; LEITE, N. M. G. **Motivos da Evasão no Curso de Licenciatura em Matemática no IFNMG - Campus Januária**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 11, 2013. **Anais...**Curitiba, 2013. Disponível em: < http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/2833_1051_ID.pdf>. Acesso em 14 fev. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Portaria Normativa nº 9, de 30 de junho de 2009. Institui o Plano Nacional dos Professores da Educação Básica no âmbito do Ministério da Educação. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 1 jul. 2009.

GAZIRE, E. S.; LAUDARES, J. B.; ALVES, M. B. In: XXXIV Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, setembro de 2006, Passo Fundo. **Resolução de problemas com equações diferenciais em cursos de engenharia**. Anais. p. 1464-1474.

GONÇALVES, Cristina Filber. **Dificuldades em Matemática ao ingressar no ensino superior**. 2007. 74f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática), Centro Universitário La Salle, Canoas.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS (INEP). **Inep apresenta resultados do Saeb/Prova Brasil 2015**. INEP.08 set. 2016. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206>. Acesso em 20 mar. 2017.

INSTITUTO FEDERAL DO NORTE DE MINAS GERAIS (IFNMG). **Projeto Pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática**. Januária: IFNMG, 2010.

LOUZANO, Paula et al. **Quem quer ser professor? Atratividade, seleção e formação do docente no Brasil.** Estudos em Avaliação Educacional. São Paulo, v.21, n.47, p.543-568, set./dez. 2010.

MELO, R. C. de; JÚNIOR, O. S. MORSELLI, N. V. **Estudo de aspectos do capital cultural e perfil cognitivo de universitários da Fatec-Mauá em 2009**. Tekhne e Lógos, Botucatu-SP, v.1, n.3, jun. 2010.

MENEZES FILHO, Naercio. **Os determinantes do desempenho escolar do Brasil**. São Paulo: Instituto Futuro Brasil/ IBMEC, 2007.

MOVIMENTO TODOS PELA EDUCAÇÃO. **Só 10% dos alunos que concluem ensino médio sabem matemática, diz ONG.** Educação na mídia. Disponível na Internet: http://www.todospelaeducacao.org.br/educacao-na-midia/indice/26158/so-10-dos-alunos-que-concluem-ensino-medio-sabem-matematica-diz-ong/ Acessado em 20 de novembro de 2016.

NASSER, L. **Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 9, 2007, Belo Horizonte (MG). **Anais...** Belo Horizonte, 2007.

OLIVEIRA, Dalila Andrade. **A Reestruturação do trabalho docente: precarização e flexibilização, Educação e Sociedade**. Campinas, v. 25, n. 89, p. 1127-1144, set./dez. 2004.

CAPÍTULO 16

A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: REVENDO AS ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS E REPENSANDO A PRÁTICA

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 12/01/2021

Elivane Leandro da Silva
Instituto Federal Goiano – Campus Ceres
Especialização em Ensino de Ciências da Natureza e Educação Matemática
Ceres – Goiás
http://lattes.cnpq.br/2240359420214581

Lucianne Oliveira Monteiro Andrade
Instituto Federal Goiano – Campus Ceres
Docente da Especialização em Ensino de Ciências da Natureza e Educação Matemática
Ceres – Goiás
http://lattes.cnpq.br/3243079818409002

Marcelo de Sousa Coêlho
Instituto Federal Goiano – Campus Ceres
Docente da Especialização em Ensino de Ciências da Natureza e Educação Matemática
Ceres – Goiás
http://lattes.cnpq.br/9544920494648507

RESUMO: O conhecimento humano pode ser comparado com um edifício sempre em construção. A complexidade de sua estrutura é constituída dos vários tipos de conhecimento, seja ele empírico, científico, filosófico ou teológico. Supõe-se que o pensamento é organizado na escola, mas demonstrado e consolidado no cotidiano. A convicção de que se aprende em qualquer ambiente já é acolhida pela maioria. Piaget compara a Ação do Homem sobre o mundo como uma construção mental cada vez mais complexa, sendo o conhecimento fruto da atividade do indivíduo sobre o meio. Seu aprendizado culmina então na ação do sujeito sobre os objetos. Esta pesquisa procurou analisar como a aprendizagem matemática acontece na escola e como se manifesta; como a formação e o desenvolvimento profissional docente podem refletir nas estratégias utilizadas e como seu ensino repercute no raciocínio e na lógica do aluno em resolver problemas. A pesquisa foi fundamentada em autores como D'Ambrósio (2000), Gatti (2014), Imbernón (2009), dentre outros. Caracteriza-se como qualitativa, tipo estudo de caso, onde foram observados professores de Matemática e alunos. Os dados foram coletados através de observações, entrevistas e questionários.
PALAVRAS - CHAVE: Aprendizagem. Estratégias. Docentes. Matemática.

MATHEMATICAL LEARNING: REVIEWING METHODOLOGICAL STRATEGIES AND RETHINKING PRACTICE

ABSTRACT: Human knowledge can be compared to a building that is always under construction. The complexity of its structure consists of the various types of knowledge, be it empirical, scientific, philosophical or theological. It is assumed that thought is organized at school, but demonstrated and consolidated in everyday life. The conviction that you learn in any environment is already accepted by the majority. Piaget compares the Action of Man on the world as an increasingly complex mental construction, knowledge being the result of the individual's activity on the

environment. Their learning then culminates in the subject's action on objects. This research sought to analyze how mathematical learning happens at school and how it manifests itself; how teacher training and professional development can reflect on the strategies used and how their teaching affects the student's reasoning and logic in solving problems. The research was based on authors such as D'Ambrósio (2000), Gatti (2014), Imbernón (2009), among others. It is characterized as qualitative, case study type, where mathematics teachers and students were observed. The data were collected through observations, interviews and questionnaires.
KEYWORDS: Learning. Strategies. Teachers. Mathematics.

INTRODUÇÃO

É comum ouvir as palavras capacitação, aperfeiçoamento, especialização ou ainda, atualização. Estas se tornam ainda mais populares ao utilizarmos o termo "educação continuada" no contexto formação de professores. É plausível que as reformas na educação das últimas décadas alicerçadas na Lei de Diretrizes e Base da Educação/LDB contribuíram e muito para a melhoria da qualidade da educação no Brasil, apesar de ainda haver um longo caminho a ser percorrido para que se alcance de fato qualidade na educação básica.

Apesar de alguns avanços, porém com uma forma educativa de pensar quase que única, com igualdades predominantes nos currículos, na gestão, nas normas e na formação igualada para todos, torna-se desnorteador pensar uma formação voltada para a liberdade, cidadania e democracia. Isso para Imbernón (2009) está implícito nos currículos transmitidos na formação do professorado dificultando um olhar mais amplo da educação e interpretação da realidade (IMBERNÓN, 2009, p. 14). Vale citar aqui outra problemática já pesquisada e documentada na questão da formação do professor. Apesar de a educação continuada ser colocada como um aprofundamento e avanço nas formações dos profissionais, no Brasil, os cursos e tantas iniciativas sem aprofundamento servem na verdade para suprir uma formação precária dos cursos de formação de professores em nível de graduação. (GATTI, 2008).

Refletindo de forma mais aprofundada nas questões de formação de professores e desenvolvimento profissional no contexto educacional brasileiro, nos deparamos com outro ponto importante quando se trata da prática pedagógica utilizada em sala de aula que são aula expositiva, lousa e giz, metodologia e recursos mais utilizados pelos professores há séculos. Talvez seja por comodismo, ou simplesmente o tradicional é o trabalho que não dá trabalho. Ou ainda, ousadamente, dizer que os professores não utilizam as metodologias, dinâmicas e tecnologias vistas, teoricamente, nos cursos de formação de professores. Será que aquilo que foi apreendido é suficiente para o professorado utilizar em suas salas de aula? Será esse o motivo de metodologias repetitivas, estagnadas, com pouquíssimos recursos? Quando falamos da disciplina de Matemática, por observação, é clara a angústia dos professores em querer fazer melhor, a cobrança não é demasiadamente pouca. Então resta como últimos questionamentos alertar, o modelo educacional utilizado no Brasil

funciona? Então, seria possível a conclusão de que se vive uma educação engessada, sem autonomia e criatividade, sem reflexão sendo consequência das políticas públicas e do modelo educacional.

As pesquisas mostram quantidade abundante de materiais disponíveis na internet sobre estratégias metodológicas. São trabalhos acadêmicos de Brighenti et al (2015), cadernos de sugestões de Venturini (2011), exemplos de estratégias diferenciadas de Muller e Nunes (2015) dentre tantas outras. Há também sites e trabalhos especificamente sobre metodologias na aprendizagem de Matemática. Alguns bem interessantes quando nos remetemos à ideia de metodologia como caminho ou simplesmente técnicas de ensino, apresentando uma linguagem mais didática e um conjunto de procedimentos. Mas o intuito é um só: alcançar os objetivos propostos com o máximo de aproveitamento em um dado tempo, bem limitado.

Quando se trata da aprendizagem Matemática sabe-se que a mesma desempenha papel fundamental para a formação intelectual, social e porque não dizer cultural e afetivo-emocional. Afinal, o ser humano se desenvolve como um todo. Na questão da aprendizagem da disciplina de Matemática nos recorremos a D'Ambrósio (1989). Para essa autora tanto a concepção do ensino e de como se aprende Matemática vem sendo questionada há tempos pela comunidade internacional e em variadas pesquisas acadêmicas. Já falando das metodologias a autora faz as seguintes observações:

> Sabe-se que a típica aula de Matemática a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele julga importante. O aluno por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor. (D'ANBRÓSIO, 1989, p. 15)

A metodologia utilizada nas aulas de Matemática pôde ser verificada no decorrer dessa pesquisa e comparada com as observações de D'Ambrósio (1989). As situações de aprendizado provocadas nas aulas de Matemática estão longe de gerar criatividade ou motivação para o aluno resolver um determinado problema, pois, conforme exposto pela autora, na "Matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento". E ainda para que haja uma renovação desse ensino é preciso mudar as concepções de como se faz e como se aprende Matemática. D'Ambrósio (2006) aponta ainda para uma formação inicial do professor de Matemática como pesquisador capaz de construir novas ideias, entendimentos e ações que resultem em aprendizagem de fato.

A fala dessa autora sobre pesquisa como uma nova forma de compreensão da aprendizagem em Matemática foi encontrada no trabalho de Muller e Nunes (2015) que tem como título "*Uma experiência de Pesquisa de Campo com alunos do Ensino Médio Noturno*", de uma escola pública do interior do Rio Grande do Sul. Nele o objetivo principal, na disciplina de Estatística foi estimular o aprendizado através de uma atividade prática e

significativa. Os resultados foram tão excepcionais que, ao analisarem os dados colhidos por eles mesmos, foram capazes de perceber que os mesmos poderiam servir como subsídios para projetos de intervenção da realidade escolar. Este é um claro exemplo de aprendizagem com significado.

O presente artigo é sequência de outro estudo desenvolvido na graduação sobre a aprendizagem nos mais diversos espaços sejam eles formal, não formal e informal. As lacunas deixadas foram uma motivação para ir além, visto que o professor desempenha papel fundamental na aprendizagem do aluno na conhecida educação formal. Além deste, os questionamentos e observações obtidos pelas experiências em sala de aula e coordenação pedagógica impulsionaram ainda mais a criação deste projeto.

As metodologias utilizadas em sala de aula são constantes preocupações de professores das mais diversas áreas e pesquisadores. Estas podem estar relacionadas com a sua formação, com a prática, com as estratégias utilizadas ou ainda será do próprio profissional. Com tantas nuances, uma avalanche de indagações sobrevém. Até que ponto as estratégias e os recursos utilizados pelo docente fazem a diferença na aprendizagem do aluno? Como de fato acontece essa aprendizagem matemática e de que forma os alunos a utilizam nas diferentes instâncias? E ainda como eles a empregam na resolução dos mais diversos problemas? A formação continuada pode ser uma necessidade para a melhoria das estratégias utilizadas. Sabe-se que as possibilidades são muitas como se verifica no texto "*Como ensinar matemática hoje?*" de D'Ambrósio (1989), Doutor em Educação Matemática.

Como linha de análise a presente pesquisa procurou investigar a dinâmica do confronto entre os saberes docentes e as práticas pedagógicas, a fim de aperfeiçoar a formação inicial e continuada de professores de Ciências e Matemática. O estudo teve como objetivos verificar a importância da formação inicial e continuada do professor de Matemática e sua relação direta com o aprendizado do aluno; analisar se e como os alunos aplicam seu aprendizado matemático no dia a dia e constatar os problemas existentes na relação ensino aprendizagem da disciplina de Matemática.

A pesquisa utilizou o método estruturalista considerando o meio pelo qual os envolvidos estão inseridos. A mesma foi baseada nos objetivos, portanto uma pesquisa qualitativa. Para D'Ambrósio esse tipo de pesquisa

> Tem como foco entender e interpretar dados e discurso, mesmo quando envolve grupos de participantes [...] depende da relação observador-observado [...] e sua metodologia repousa sobre a interpretação e as técnicas de análise de discurso. (D'AMBRÓSIO, 2006, p. 78)

Pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética, número do CAAE (Certificado de Apresentação de Apreciação Ética) 12726919.2.0000.0036 com aprovação final pelo CEP (Comitê de Ética em Pesquisa) em 04 de junho de 2020.

Este estudo contou com a participação de 27 alunos do ensino médio de duas

escolas da cidade de Ceres/GO, sendo uma estadual e outra federal, e também com 3 professores desses alunos, todos com graduação em licenciatura Matemática. Destes, um é especialista e mestre em Educação de Ciências e Matemática, o outro, além de licenciado, é mestrando no programa de formação de professor de Matemática da UFG (PROFMAT) e especialista em educação e o terceiro licenciado em Matemática, todos com vários cursos na área de educação.

A coleta de dados seguiu um roteiro que iniciou com a observação de aulas e anotação das estratégias metodológicas, bem como os recursos utilizados pelos professores pesquisados. A coleta também foi obtida através de entrevistas, questionários e análise do Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás. As entrevistas e os questionários com perguntas claras e objetivas foram realizadas com antecedência garantindo a uniformidade no entendimento dos entrevistados e também a padronização dos resultados.

Por fim, os assuntos relacionados à formação inicial e continuada, estratégias metodológicas e aprendizagem matemáticas foram teoricamente descritos e relacionados com os dados obtidos. Ainda sobre o assunto, nas próximas seções tomarei emprestado do autor Imbernón a expressão “professorado” para fazer referência a docentes ou professores.

FORMAÇÃO INICIAL E CONTINUADA - A FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSORADO

Algumas ações, mesmo que inconscientes, estão, ou deveriam estar, intrínsecas no dia a dia de um professor. São elas: a reflexão, o pensamento, a escrita, o planejamento, o replanejamento, a observação e até a investigação da própria prática, muitas vezes provocada pela experiência, sendo elas quase que constantes, mas, contínuas. Na verdade “O educador estuda os outros, a si mesmo, a sua prática, a realidade”, (FREIRE, 2008, p. 52). Essas ações, como apontam Freire (2008); Imbernón (2009); Gatti (2014); dentre outros estudos, são na verdade elementos essenciais para uma formação completa e desenvolvimento profissional de um docente. Mas nem sempre um profissional consegue desenvolver algumas habilidades como a reflexão e a escrita por si só. E é na sua formação, seja no ensino médio, na graduação, na especialização, mestrado, doutorado, em especial nos estágios e pesquisas, que se segue um incessante aprendizado a ser refletido e aplicado em sala de aula. Como o ser humano se desenvolve como um todo, a história de cada professor, o contexto social no qual está inserido e as políticas públicas também refletem diretamente na sua prática pedagógica.

As pesquisas sobre formação inicial do professorado, que não são poucas, apontam inconsistência entre o que se aprende na sua formação e a realidade em sala de aula. Descrevem também dentre outros problemas:

> Improvisação de professores; ausência de uma política nacional específica para as licenciaturas, pouca atenção às pesquisas sobre o tema; diretrizes curriculares isoladas por curso; currículos fragmentados; estágios sem projeto e acompanhamento; aumento da oferta de cursos a distância; despreparo de docentes das instituições de ensino superior para formar professores; e características socioeducacionais e culturais dos estudantes, permanência e evasão nos cursos. (GATTI, 2014, p. 24).

Na perspectiva de um recorte bem delimitado sobre a formação inicial do professor na área de licenciatura em Matemática, considerando especialmente quando o profissional atua na área em que foi formado, procurou-se profissionais atuantes em sala de aula que tivessem essa formação. As dificuldades encontradas quase provocaram uma renúncia do projeto, uma vez que não se encontra facilmente professores formados na área de Matemática atuantes em sala de aula na cidade de Ceres. Há muitos formados em outras áreas afins que ensinam essa disciplina. Gatti (2014) destaca ainda como um dos problemas identificados, a improvisação de professores, e na presente pesquisa isso foi definitivamente verificado.

Muitos problemas, de fato, permeiam a educação, mas a improvisação de professores é mais comum do que se imagina. Segundo o Censo Escolar da Educação Básica 2018, pesquisa realizada anualmente pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), o percentual de disciplinas ministradas por professores com formação superior de licenciatura na mesma área é de apenas 50,8% na região Centro-oeste. Há regiões, segundo essa mesma pesquisa, com percentuais ainda bem menores de formação adequada de professores atuantes em sala de aula. (INEP, 2019, p. 5 e 8)

Apesar de avanços, verifica-se ainda um longo caminho a ser percorrido para que se alcance no país uma educação de qualidade e para isso uma mudança radical no sistema educacional brasileiro, talvez uma utopia, deveria manifestar-se. Muitas pesquisas apontam um direcionamento como investimentos e credenciamentos em cursos superiores e certificação de competências docentes diferente do sistema atual e ainda:

> Apoiar escolas avaliadas e credenciadas com assistência técnica e financeira; condicionar o exercício do magistério à conclusão do curso em instituição credenciada e à avaliação para certificação de competências docentes. (MELLO, 2000, p. 101)

Mello (2000) ao dispor sobre a formação inicial de professores, fala sobre a urgência em reformular os cursos que formam professores no Brasil e aponta que o problema é histórico. Sobre o despreparo de docentes das instituições de ensino superior para formar professores, Mello (2000) afirma que "Ninguém facilita o desenvolvimento daquilo que não teve oportunidade de aprimorar em si mesmo".

Sobre a formação inicial dos professores entrevistados, todos são licenciados em Matemática sendo um mestre em Ensino de Ciências e Matemática e outro mestrando no

Programa de Formação de Professor de Matemática (PROFMAT), na Universidade Federal de Goiás (UFG). São professores experientes em sala de aula, efetivos de escolas públicas estaduais e federais, todos com mais de 10 anos de profissão e um inclusive com mais de 20 anos de profissão. Quando perguntados: Você acha importante o professor dar aulas da área na qual ele foi formado? Todos responderam que sim. O professor C ao responder o porquê completou: "*Ai, eu penso que, quando você é formado naquela área, cê tem como justificar pro aluno o porquê das coisas, mostrar muito exemplo, fazer é é é, como é que fala, interligações entre um contexto e o outro contexto e, quando você não é formado na área, cê às vezes, cê* não tem essa habilidade *de fazer essas ligações, de mostrar essas aplicações nos contextos*."

É clara a opinião dos professores entrevistados sobre a importância do professor lecionar a disciplina na área em que foi formado. Apesar de reconhecerem que só uma graduação, ou seja, uma licenciatura não se mostra suficiente para habilitar um professor no exercício de sua profissão. Mello (2000) aponta ainda outro problema vinculado à formação inicial de professores. A autora discorre sobre o distanciamento na formação de professores em áreas específicas e de professores polivalentes destacando que ao especialista não é oferecido situações de aprendizagens e não propiciam a articulação desse conteúdo com a transposição didática, assim como ao professor polivalente sua preparação se reduz a um conhecimento pedagógico esvaziado do conteúdo a ser ensinado. Assim, para ambos, o exercício de transposição didática do conteúdo e a prática de ensino que deveriam estar lado a lado estão desvinculados em suas formações. Apesar das mudanças determinadas pelas Diretrizes Curriculares Nacional de 2015 sobre a formação de professores, que aponta responsabilidade das instituições formadoras promoverem, de maneira articulada, o atendimento às especificidades das diferentes etapas e modalidades, observando as normas definidas pelo conselho nacional de educação, provoca-nos estranheza no sentido de adequação dos cursos de formação inicial e continuada às leis estabelecidas para os mesmos. O que nos abre um leque de indagações a respeito do Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI), do Projeto Político Institucional (PPI) e do Projeto Pedagógico de Curso (PPC) dessas instituições formadoras. Importante ressaltar que os professores pesquisados finalizaram suas licenciaturas há alguns anos, ou seja, antes das modificações impostas pelo MEC. A despeito dessa formação, compreende-se a não oferta de disciplinas que trabalhassem com a transposição didática. Mesmo não havendo professores formados recentemente em Licenciatura em Matemática atuando nas instituições da cidade de Ceres, fica a incerteza de uma resposta para a seguinte pergunta: haveria diferença entre esses profissionais professores? Uma demanda carente de respostas, talvez um problema iminente para futuras pesquisas.

Ao professor B, quando perguntado sobre a importância do professor atuar na área em que foi formado ele completa: "*É importante, tem que ter formação na área e não basta simplesmente ser formado na área né. A gente sabe que tem na graduação, você pode ser*

bacharel ou licenciado né, o professor ele vai tá habilitado para assumir a sala de aula se ele for licenciado ou se ele tiver uma especialização, que, o bacharelado é voltado para a área de pesquisa, mas aí falta esse preparo pra a sala de aula, didática, metodologia, parte de avaliação que é importante né, até o estágio é feito de forma diferente que a gente tem esse primeiro contato com a sala de aula né, isso é importante." O professor B enfatizou seu crescimento profissional ao realizar cursos de formação continuada especificamente na área de formação de professores. Destacou ainda que, ao finalizar sua licenciatura em Matemática as questões como didática, metodologias e avaliação foram considerados conhecimentos "rasos", insuficientes para propiciar uma base sólida em sua prática diária.

Imbernón (2009), ao pensar uma formação de qualidade, afirma que torna-se irrelevante analisar a formação como o domínio de disciplinas científicas ou acadêmicas apenas. Assim, faz-se necessário estabelecer novos modelos relacionais e participativos na prática da formação. Nessa mesma linha de raciocínio, Mello (2000) questiona a dificuldade de o professor relacionar com seus alunos a teoria e a prática como manda a Lei de Diretrizes e Base da Educação se, em sua formação, os conteúdos são totalmente desvinculados da prática (MELLO, 2000, p. 100). Ou seja, "a prática de ensino" propriamente dita, a "transposição didática" dos conteúdos específicos da formação são abstratos, não sendo trabalhados de forma efetiva para dar uma base mais sólida na formação inicial do professor habilitando-o minimamente para os desafios da sala de aula. Portanto, esse é um dos problemas que vêm desqualificando ainda mais os cursos de Licenciatura.

Interessante que esse mesmo autor chama a atenção para uma "crise institucional da formação", considerando o sistema educativo do século anterior como obsoleto, sendo o mesmo utilizado na atualidade. A reflexão sobre o sistema de ensino inserido num contexto de mundo globalizado pode indicar seguramente um ensino envelhecido. Isso porque, para esse mesmo autor, novos elementos como a formação emocional, a relação entre as pessoas, redes de intercâmbio e a comunidade foram inseridos no mundo educacional, somando-se a essa educação globalizada. Na contemporaneidade pode-se afirmar que a educação carece de uma releitura e o sistema educacional de uma reformulação. Nada engessado. Nada tão novo. Quem sabe adaptado às novas realidades. As primeiras metamorfoses manifestar-se-iam nas políticas públicas. No Brasil a diversidade cultural deslumbra-se num vai e vem colorido, rico, cheio de vida. Seria também nos currículos, nada emperrados, nada volúveis, nada fragmentados que o produto de toda essa mistura, somado a uma formação de qualidade voltada para a liberdade, cidadania e democracia, resultaria sim em novas perspectivas, em diretrizes mais contínuas e um rumo mais promissor para a educação.

A FORMAÇÃO CONTINUADA

Para Gatti (2008), a formação continuada, no Brasil, se despontou vertiginosamente

a partir da última década do século passado impulsionada pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN, lei n. 9.394/96) somado às condições da sociedade contemporânea, além dos desafios colocados aos currículos e ao ensino. Descreve também de forma sucinta como essa lei desencadeou as discussões e iniciativas dessa formação. A formação continuada, como num todo, carrega ou deveria carregar, por si só, a bandeira da liberdade, cidadania e democracia. Porém a mesma autora chama a atenção ao colocar que apesar dos avanços "as legislações, fruto de negociações sociais e políticas, abrem espaços para as iniciativas de educação continuada, ao mesmo tempo em que também as delimitam". (GATTI, 2008, p. 63).

Esta limitação pode ser entendida como o distanciamento do exercício da crítica, na tentativa de fixar modelos técnicos. O que também, ao mesmo tempo, vem tolhendo o professorado de perceber sua rica e extensa bagagem, desvalorizando-o colocando de lado suas experiências afastando-o de sua realidade. Mas, o que entender de formação continuada se não há nem sequer um consenso de sua conceituação. Alguns autores fomentam esse conceito, mas não se arriscam muito. Uma forma de identificar o termo "educação continuada" seria:

> Ora se restringe o significado da expressão aos limites de cursos estruturados e formalizados oferecidos após a graduação, ou após ingresso no exercício do magistério, ora ele é tomado de modo amplo e genérico, como compreendendo qualquer tipo de atividade que venha a contribuir para o desempenho profissional. (GATTI, 2008, p. 57).

Na concepção da autora debates sobre a definição desse conceito não ajudam a pormenorizá-lo e talvez nem seja tão urgente explicá-lo, afinal qualquer possibilidade de abarcar "informação, reflexão, discussão e trocas que favoreçam o aprimoramento profissional" podem integrar ao "rótulo" de educação continuada.

Pode-se também entender como conceito dessa formação o que diz Alvarado-Prada et al, (2010) quando sugere a educação continuada como uma "ferramenta", ou seja, tudo aquilo que engloba e favoreça o processo ensino-aprendizagem e que os docentes as utilizem como novas competências em suas práticas educacionais.

Já Imbernón (2009) não se ateve em conceituar, como ele mesmo chama a formação permanente, mas aponta elementos que deveriam estar inseridos fortemente nessa formação. Dentre eles, os quais também se entendem sua grande relevância em nosso contexto: o trabalho em equipe/coletividade, conteúdos formativos baseados em habilidades e atitudes, metodologias diferenciadas, estímulo à capacidade de gerar novos conhecimentos pedagógicos e autonomia profissional além da integralização dos conteúdos às práticas de ensino. Esse último grande contribuinte para boa parte dos problemas enfrentados na visão dos professores pesquisados, pois, quando perguntados se já haviam feito cursos de formação continuada todos responderam sim, e ao serem questionados sobre suas opiniões e relevância dos cursos de formação continuada da

área de Matemática o professor C respondeu: "*Depende, esse multicurso de matemática eu não gostei, porque ele tinha um material pra gente responder nos encontros, a gente tinha os encontros semanais de 4 horas e e eram perguntas assim, muito muito fora do que contribuísse pra aprendizagem mesmo, … é às vezes mandava um texto e aí perguntava umas coisas naquele texto que assim, a prática da gente mesmo do dia a dia os problemas que a gente tem em sala de aula como resolvê-los não abordava essas questões, ficava muito a nível mais teórico, não gostei. Acho que esses cursos de formação continuada eles tem que, focar mais o conteúdo mesmo, conteúdo do dia a dia de matemática, porque às vezes o professor, por exemplo, pega uns conteúdos como de análise combinatória, geometria espacial que são conteúdo, às vezes complicados de explicar e ele tem dificuldade de trabalhar aquilo com os alunos, então acho que a formação continuada tinha que atingir nesse aspecto, como trabalhar determinados conteúdos. Nós tivemos a muitos anos atrás um curso do professor Gerci da UFG, ele funcionou ... ali na Goiás, foi dois dias, me parece, mas foi um excelente curso. Excelente!".* Quando colocado pra ele que, então existem cursos que são bons e atendem às expectativas, ele disse: *"É, mais esse curso do Gerci tem mais de 10 anos, 15 anos mais ou menos que aconteceu".* Entende-se, portanto, que muito remotamente e há tempos houve tentativa de proximidade para a resolução de problemas de ordem metodológica que relacionem teoria e prática vivenciadas em sala de aula. Isso cogita real existência e necessárias possibilidades de se ministrarem cursos de formação de fato continuada e muito próximo da necessidade do professorado em sua lida pedagógica, em especial que relacione as necessidades de intervenções pedagógicas e problemas de transposição didática de conteúdos específicos.

Vale ressaltar que existe toda uma conjuntura que determina a formação continuada como um jeito de suprir uma formação de má qualidade existente nos cursos de graduação, em especial nas licenciaturas e quase sempre não há aprofundamento e muito menos ampliação dos conhecimentos. Muitos problemas permeiam a educação continuada e a mesma é identificada como um dos principais pontos de atenção atuais da educação e está intimamente agregado à questões advindas da sociedade e da educação como num todo, já que ela não se caracteriza como continuada, "pouco formam, pouco valorizam e até por vezes desvalorizam os docentes" (GATTI, 2008; ALVARADO-PRADA et al 2010; MELLO, 2000). Concordamos quando nos é chamada a atenção para o cuidado em não idealizar o professor como alguém que não reflete sua prática e nem é pesquisador, já que são estas as concepções delicadamente mascaradas de educação continuada. Uma inverdade. O que se tem são professores "sem condições reais de tempo, de orientação e de gestão requeridas para a reflexão e a pesquisa" especialmente professores da rede estadual e particular de ensino. (ALVARADO-PRADA et al, 2010, p. 368 e 374). De modo geral, a educação continuada envolve:

> Horas de trabalho coletivo na escola, reuniões pedagógicas, trocas cotidianas com os pares, participação na gestão escolar, congressos e cursos de diversas naturezas e formatos, ou seja uma infinidade de atividades que muitas vezes se tornam enfadonhas. (GATTI, 2008, p. 63).

Muitos professores encaram a formação continuada como necessária e é visivelmente notado um esforço e aceitação desses cursos apesar de apontarem grande distanciamento da realidade vivida em sala de aula. Ao professor B quando perguntado sobre a formação inicial e continuada dos profissionais da área de Matemática ele respondeu: "*É muito importante né, que só a graduação ela é muito rasa né. A gente, o tempo é muito curto pra gente sentir o que que é tá na sala de aula, né. Então quando a gente vai fazer essa formação continuada acaba, facilita pra gente né entender todo esse processo, sentir as dificuldades, é um tempo adicional que acaba dando muita base pra gente trabalhar. É muito importante sem dúvida.*"

Muitas pesquisas buscam sugerir, propostas, alternativas para melhorar e/ou qualificar a formação continuada, porém Imbernón aponta que:

> Não se pode falar nem propor alternativas para a formação continuada sem antes analisar o contexto político e social (de cada país, de cada território) como elemento imprescindível na formação, já que o desenvolvimento das pessoas sempre tem lugar num contexto social e histórico determinado, que influencia sua natureza; isto é, analisar o conceito de profissão docente, situação trabalhista e carreira docente, a situação atual (normativa, política, estrutural…) das instituições educativas, a situação atual do ensino nas etapas infantil, ensino básico e ensino médio, a análise do atual alunato e a situação da infância e da adolescência nas diversas etapas numa escolarização total da população (em alguns países). (IMBERNÓN, 2009, p. 9)

As pesquisas que fundamentam este estudo apresentaram claramente o que esse autor pontua como análise fundamental antes de sugerir alternativas que são o contexto político e social do país. Assim, respeitando fielmente esses contextos Mello (2000) sugere a "criação de um sistema nacional de certificação de competências docentes e a priorização da área de formação de professores nas políticas de incentivo, fomento e financiamento"; Gatti (2008) questiona sugerindo que "não seria melhor investir mais orçamento público para a ampliação de vagas em instituições públicas para formar licenciados e investir na qualificação desses cursos, em termos de projeto, de docentes, de infraestrutura, deixando para a educação continuada realmente os aperfeiçoamentos ou especializações?" Na mesma linha de pensamento, Alvarado-Prada (2010) propõe a pesquisa coletiva como modo de formar pesquisadores e sugere também o "pesquisar formando" e a Formação Continuada de Professores em Serviço – FCPS, esta última sendo realizada dentro da instituição, ou seja, no espaço escolar. As sugestões aqui descritas somadas às novas Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial e continuada em nível superior formam um conjunto de ações que se bem articuladas contribuiriam e muito para a qualificação dos cursos.

Por sorte, muitas pesquisas discutem a questão da formação inicial e continuada e sugerem opções para o Ministério da Educação, que se espera ser composto por pessoas que valorem pesquisas científicas e as tomem como base para nortear futuras decisões. Mas há de se admitir um longo caminho ainda a ser percorrido, já que muitas pesquisas são recentes e necessitam ainda de mais discussões a respeito.

ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS E A APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

Comprovadamente sabe-se que a aprendizagem acontece nos mais diversos espaços, sejam eles, na família, na escola, na igreja, numa reunião de amigos, e tantos outros. Ou seja, a partir do nascimento o ser humano constrói seu conhecimento permanentemente e, no entanto, este pode ser denominado como inacabado resultante de sua interação com o meio e o outro, sendo na troca, socialização e na mediação a ocorrência efetiva da aprendizagem. (SILVA, 2014, p. 06). São muitas as maneiras de se aprender. Na escola, na chamada educação formal, o aluno assiste à aula do professor, este por sua vez, utiliza-se de variadas estratégias metodológicas, ferramentas e recursos para que seu discente entenda o que se quer ensinar.

Os desafios na utilização de diversificadas metodologias compõem o cotidiano do professor, já que este não tem "tempo" devido à carga horária, acúmulo de atividades e reuniões, dentre outras situações que acabam por extorquir sua "autoformação" (BRIGHENTI et al, 2015). Para que os objetivos deste texto sejam priorizados, interessante será correlacionarmos as estratégias metodológicas com a aprendizagem matemática, isto é, verificar se existem formas de ensinar e aprender matemática de maneira prazerosa e mais produtiva.

Aprender de forma geral deve ser uma ação prazerosa e contínua, no entanto, quando se fala em aprender Matemática tanto alunos quanto professores deixam transparecer certa cautela. Cautela em dizer se o aluno gosta ou não de aprender matemática, cautela ao expor suas metodologias utilizadas e os alunos por sua vez demonstram entender a importância da disciplina e de sua aprendizagem somente. Mas a aprendizagem Matemática desempenha papel fundamental para a formação intelectual, social e porque não dizer cultural e afetivo-emocional. Na visão dos professores entrevistados, alguns de seus alunos não gostam de Matemática, mas o professor A argumentou: "*Gostar, gostar mesmo assim... acho que, praticamente é uma disciplina que mexe muito né com a mente, mas eu acho que razoavelmente deve gostar que, estudar não é fácil, né, é uma obrigação e eu acho que o aluno também tem essa dificuldade né de falar assim, gosto da disciplina mas então às vezes também pode ser gostar da disciplina de acordo com o professor, do método que o professor ensina, do jeito do professor, né então às vezes passa gostar, assim, do conteúdo passa a gostar. É Eu acho que ... Matemática é tão essencial né, então é tão complicado você falar assim não gosta, gosta porque a matemática tá ligada a tudo,*

tudo, tudo... então acho que vai depender de algum aluno né." Aqui é possível verificar claramente a cautela do professor em dizer se seus alunos gostam ou não da disciplina. Porém, ele enuncia a importância da intermediação do professor ao dizer que depende do professor e dependendo da metodologia o aluno passa a gostar. A metodologia utilizada torna-se um dos fatores que faz o aluno descortinar o medo da disciplina. Ou seja, fica explícito o papel do professor como "mentor, facilitador", aquele que sabe intermediar o acesso do aluno à informação. (BRIGHENTI et al, 2015).

Já o professor B levanta outro questionamento ao responder a mesma pergunta. Para ele é complicado responder, pois aqueles que não gostam é porque não compreendem os conteúdos e não conseguem acompanhar devido as defasagens de conteúdos anteriores, trazidos do Fundamental I e II. Outro ponto delicado é quando o professor relata a fala de seus alunos quando indagados em sala, pela sua postura em não gostar da disciplina: "*A resistência né, a questão é, não consigo tirar nota então eu não gosto dessa disciplina, ou alguns tiveram trauma com algum professor de Matemática. Talvez o professor não soube lidar com eles, né, foi foi* ríspido e aí eu já tive casos de aluno que relatou que não gosta de Matemática porque teve trauma com o professor, então foi, foi né, nem essa questão da disciplina em si, embora que a maioria é né, ah! eu não consigo aprender matemática então eu não gosto. Aí a gente tem que tentar entender, será que não gosta ou simplesmente não tá conseguindo acompanhar e isso não está sendo interessante.*"* O professor B é um exemplo de professor que escuta seus alunos e procura entender seus pensamentos, direcionando seus objetivos em suas decisões curriculares e metodológicas como exposto D'Ambrósio U. e D'Ambrósio B. (2006). O problema relatado por esse professor foi gerado anteriormente, em outras séries. Fica aqui uma lacuna, não será exatamente pela falta de uma formação inicial e permanente, adequadas e de qualidade que os professores não conseguem lidar com diversas situações que acontecem em suas aulas? Esse assunto, segundo Gatti (2014) ainda carece de pesquisas, apesar de inegáveis as contribuições daquelas já realizadas, pois ainda há muitos "problemas ligados à docência da educação básica e à formação para esse trabalho". (GATTI, 2014, p. 29).

A metodologia mais utilizada nas aulas de Matemática, segundo D'Ambrósio (1989), ainda é a aula expositiva, com repetição de um modelo de solução apresentado ao aluno para a resolução dos exercícios posteriormente. Os recursos mais utilizados, segundo a mesma autora, ainda são o quadro e o giz. Evidentemente as leituras e pesquisas explicitam a má formação inicial e continuada dos professores como um dos fatores que justificam as metodologias com aulas expositivas e resolução de exercícios e a não utilização de tecnologias modernas como recursos. Outra justificativa, como observado na presente pesquisa seria o acúmulo de atividades exercidas pelo professorado, ou seja, a falta de tempo. Quando perguntados sobre as metodologias utilizadas em sala de aula, todos os professores entrevistados utilizam aulas expositivas e resolução de exercícios para fixar o que foi exposto. Quanto à utilização de ferramentas tecnológicas modernas (notebooks,

iphones, internet, Geogebra) como recursos nas aulas de Matemática, o professor B afirmou utilizar grupos de *whatsapp* da turma para enviar *link* de vídeo que reforce aquilo que foi exposto em sala, ou seja, é utilizado como atividades extra sala. "*Em alguns indico alguns softwares pra eles fazer uns teste também quando o assunto é gráficos de funções.*" Já o professor A utiliza muito remotamente vídeo aulas. O professor C não utiliza nenhuma tecnologia moderna. Nos cursos de formação de professores de Licenciatura em Matemática não há em seu currículo disciplinas que explorem a transposição didática do conteúdo e a prática de ensino. (JUNQUEIRA E MANRIQUE, 2015). Urge questionar: e os estágios não deveriam oferecer base suficiente para colocar tais exercícios em prática? Não utilizar tais ferramentas não se encaixa em comodismo, tem a ver com excesso de "carga horária e acúmulos de atividades". (SOPELSA et al, 2009).

Ainda sobre metodologias e recursos utilizados em sala de aula, e pensando o professor como aquele "pesquisador" a que se refere Alvarado-Prada (2010) e D'Ambrósio U. e D'Ambrósio B. (2006), aos entrevistados perguntou-se quando seus alunos apresentam maiores dificuldades na disciplina de Matemática com relação à metodologia e estratégia utilizada. Para o professor A os alunos não entendem quando não se mostra o modelo de como resolver uma atividade passo a passo. Já os professores B e C afirmam que o problema não é a metodologia e sim o conteúdo. Aqueles conteúdos mais abstratos e afirmam ser mais complicado para os alunos quando se começa pela definição, utilizando letras logo no começo. Porém a metodologia utilizada por eles é a aula expositiva. Mas o professor B chama a atenção ao afirmar que o problema maior enfrentado por seus alunos está na interpretação e diz que: "*primeiro interpretação que eu acho que é o início né, eles não sabem interpretar, não sabem ler o problema é saber o que eles têm de dado ali e o que, que eles precisam pra resolver e depois não sabe aplicar e não sabe interpretar não sabe o que que eles tem que aplicar ali pra resolver o problema."* A interpretação é fundamental para que o aluno compreenda um problema para depois utilizar conceitos matemáticos já vistos para resolvê-lo. Sopelsa et al (2009) aponta como uma das dificuldades enfrentadas pelo professor que tem um papel social: o nível intelectual dos alunos e suas dificuldades de aprendizagem.

Como parte da metodologia utilizada pelos professores pesquisados procurou-se visualizar qual estratégia e/ou recurso utilizado por ele quando seu aluno não consegue assimilar o conteúdo ministrado. Os professores B e C afirmaram utilizar *formas diferentes de explicar o conteúdo* e trazê-lo para mais perto. Além desse atendimento mais individualizado, outro recurso utilizado por esses professores é mandar o aluno para a monitoria. O professor C fez a seguinte observação: "*Depende. Tem duas situações de aluno que não aprende a matéria, aquele que tem uma extrema dificuldade, mas ele quer aprender, aí esse geralmente eu atendo ele nos horários, esse horário aqui mesmo é um que eu disponibilizo para o atendimento e tem o monitor aí eu encaminho eles para o monitor, agora o aluno que não quer esse é difícil, quando ele não quer, você encaminha ele para*

o monitor ele não vai as aulas de monitoria ele não acompanha, aí infelizmente.” Esses professores desempenham seu papel social, mas deixam transparecer suas frustrações quando não conseguem fazer seus alunos se envolverem mais com a disciplina. Afinal, o processo de ensino e de aprendizagem acontece por meio da “interação, das trocas e na socialização”. (SOPELSA et al, 2009, p. 1425). O professor A afirma que uma das melhores estratégias é a formação de grupos de estudos, pois segundo ele: *… às vezes o colega ajudando ele entende mais que a minha linguagem que é a linguagem do professor… às vezes ele consegue entender melhor do que com o professor, eu tento trabalhar dessa forma.*

Sobre aprender Matemática perguntou-se aos professores se seus alunos reclamam dessa disciplina e o que eles dizem sobre aprendê-la e o que pensam sobre sua importância. O professor A afirmou que “*N*ão tem problemas não… eles aprendem assim, aprendem matemática … é para passar de ano e não para apropriação deles mesmo ... parece que eles ainda não tem a maturidade de entender, então eles ... já vem desde de lá do fundamental com essa ideia … tenho que estudar pra passar e não apropriar do conhecimento...no geral que eu vejo realmente que o aluno... estuda pra passar.*”* Os professores B e C afirmaram que seus alunos reclamam muito. O professor C complementou: “*Aqueles que têm dificuldade e não gostam, eles não, não veem a utilização... da matemática no futuro deles… Por outro lado já tem uns que são apaixonados né, principalmente nos cursos de informática.”* O professor B reafirmou que: “A *reclamação é como eu já tinha dito, é a questão da base, tem uma base fraca, então ele não consegue acompanhar daí acha que é difícil, mas no momento que eles começam entender o conteúdo,* é, fica mais interessante. A maioria acha que não tem nenhuma aplicação. E esse questionamento sempre, professor onde é que eu vou aplicar isso, pra quê que eu *tô aprendendo isso. Nunca vou usar isso em lugar nenhum. Ai a gente costuma brincar com eles, no mínimo no ENEM, num concurso, isso vai acabar sendo cobrado isso, então isso é importante.”* Verifica-se, novamente, na fala dos professores, os problemas identificados como cultura, sociedade caracterizada por um mundo globalizado e como são grotescas as mudanças no “contexto social, mudanças essas que deixaram muitos na ignorância, numa nova pobreza (material e intelectual)”. (IMBERNÓN, 2009, p.8)

Para finalizar as entrevistas perguntou-se aos professores se seus alunos questionam o porquê de aprender Matemática, quais eram os questionamentos mais comuns e quais eram suas respostas. Todos responderam que os alunos questionam o porquê de se aprender Matemática. E os questionamentos mais comuns são: “P*ra que que eu vou utilizar isso, pra quê que eu quero isso, onde vou usar isso.”* As respostas dos professores também foram bem parecidas. O professor A disse que alguns conteúdos “*a gente estuda realmente pra matemática*, ou seja, *pra resolver alguns problemas da matemática mesmo, já outros conteúdos como alguns da geometria e da Matemática financeira pode ser aplicado no dia a dia.”* O professor C também enfatizou o problema da maturidade ao compreender a

importância da disciplina. O mesmo professor citou o problema da defasagem de conteúdos de séries anteriores e contou que: "*E a coisa mais triste é o aluno às vezes passar no vestibular igual a gente tem aqui, um monte de alunos que entram e não dão conta do cálculo e desistem. E aí quando você pega o percentual do instituto, o cálculo é a disciplina que mais reprova dentro do instituto. E não é o cálculo que reprova eu falo pra eles, não é o cálculo que está te reprovando, o que tá te reprovando é a Matemática da sétima série até o terceiro ano do ensino médio que você não aprendeu."* O professor B prefere mostrar aos seus alunos que é interessante aprender e que para aprender tem que gostar: "*eu até brinco né que a gente aprende mais por hobby eu aprendo porque eu gosto, tem muita coisa que às vezes posso pensar que nunca vou usar aquilo, mas eu quero aprender, porque eu acho interessante, eu acho legal aquela construção, como é que ele fez pra chegar naquela resposta, né e tá sempre buscando alguma coisa além, a gente tem que dar um passo além do que a gente vai precisar isso é legal pra gente."*

Todos os professores citaram problemas de ordem social, cultural, intelectual e de aprendizagem. Assim, concordamos com Gatti (2014) ao afirmar que são diferentes os aspectos e problemas ligados à docência na educação básica e à formação para esse trabalho, apesar dos conhecimentos gerados pelas pesquisas já realizadas, ainda são poucos. Faz-se necessário a realização de pesquisas no 'chão da escola', torna-se necessário ouvir o professor, suas angústias, os problemas por ele enfrentado, para realizar, no que se refere à formação inicial e continuada de professores, "ações mais incisivas por parte dos gestores e das instituições de ensino superior". (GATTI, 2014, p. 29).

Como parte da pesquisa foram assistidas aulas dos professores pesquisados e anotadas as metodologias, conteúdos ministrados bem como os recursos utilizados. Todos os professores realizaram aulas expositivas com correções de exercícios no quadro. Todos utilizaram como recursos o giz e o quadro com turmas entre 24 a 35 alunos presentes. Os conteúdos trabalhados em sala estão de acordo com o Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás. Nessa comparação foi possível observar a grande quantidade de conteúdos sugeridos para serem trabalhados no ensino médio. Ao observar a fala de D'Ambrósio, em relação à quantidade de conteúdos a serem trabalhados ela afirma que:

> Uma das grandes preocupações dos professores é com relação à quantidade de conteúdo trabalhado. Para esses professores o conteúdo trabalhado é a prioridade de sua ação pedagógica, ao invés da aprendizagem do aluno. É difícil o professor que consegue se convencer de que seu objetivo principal do processo educacional é o que os alunos tenham o maior aproveitamento possível, e que esse objetivo fica longe de ser atingido quando a meta do professor passa a ser cobrir a maior quantidade possível de matéria em aula. (D'AMBROSIO, 1989, p. 16)

Nem sempre o professor prioriza sua ação pedagógica no conteúdo trabalhado. Ele tenta priorizar a aprendizagem do aluno, mas muitas vezes tem sua liberdade limitada

quanto à escolha do que ensinar. Na experiência adquirida, sempre foi obrigatório cumprir a listagem de conteúdos descritos no currículo.

Ao refletir sobre "Como Ensinar Matemática Hoje", D'Ambrósio (1989) afirma que o ensino da Matemática é basicamente uma repetição e aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor, sendo o aprendizado realizado através de procedimentos de transmissão de conhecimentos. Porém a mesma autora reforça existirem crenças sobre o ensino da Matemática que reforçam tais práticas. Uma delas é o professor acreditar que seu aluno aprende melhor quanto maior for o número de exercícios, além de mostrar a Matemática como um corpo de conhecimentos acabado e polido. Uma realidade com real necessidade de mudanças. O aluno precisa pensar a Matemática, perceber sua real importância, amadurecer quanto a isso, mas essa realidade faz parte da cultura, do descaso das políticas públicas, da família, do contexto social e sócio históricos vivenciados por esses educandos. Muitas vezes para eles faltam perspectivas de um futuro melhor.

A Matemática aprendida na escola está presente em tudo, no comércio, na escola, na vida cotidiana, logo pode-se afirmar que na escola o aluno assiste aula, compreende e aplica os conceitos em seu cotidiano. Assim, a aprendizagem Matemática acontece nos mais diversos espaços, desmistificando a ideia de que só se aprende Matemática na escola. A prática pedagógica do ensino de Matemática deve abarcar situações de investigação, exploração e descobrimento, colocando o aluno como o centro do processo educacional, o que não acontece segundo D'Ambrósio (1989). Há pesquisas que sugerem ensinar Matemática utilizando metodologias como pesquisas, resolução de problemas, modelagem, etnomatemática, jogos matemáticos e o uso de computadores. De acordo com D'Ambrósio (1989); D'Ambrósio U. e D'Ambrósio B. (2006); Muller e Nunes (2015) essas metodologias poderão ser bem mais atraentes, produtivas e interessantes para os alunos demandando tempo do professor que ele não tem.

Assim como ouvir os professores foi de extrema importância, ouvir os alunos também fez-se necessário. Foram num total de 27 alunos dos professores pesquisados que responderam os questionários. As respostas dos alunos foram dispostas na tabela abaixo para melhor compreensão:

Pergunta	Quant. Alunos	Respostas
Sexo?	7	Masculinos
	20	Femininos
O que está cursando?	27	Ensino Médio

Tem facilidade na disciplina de Matemática?	14	Sim
	2	Não
	8	Às vezes
	3	Nunca tive
Gosta da disciplina de Matemática?	20	20 sim
	7	Não
Por que gosta da disciplina de Matemática?	10	Importante para a vida e o comércio, ajuda a passar na faculdade, é essencial, ajuda no raciocínio, se identifica com os cálculos.
	2	Não dou conta de compreendê-la, difícil de entender.
	6	Tem prazer em resolver problemas, se sente bem, desenvolve um raciocínio lógico mais acelerado, tem facilidade em exatas, é interessante apesar de difícil, encaro como desafio.
	4	Não dou conta de compreendê-la, difícil de entender, pelo fato de que não usaremos metade do que foi ensinado.
	4	Interesso-me por números, gosto de resolver problemas, interessante, desafiador, é importante, gosto de entender como funciona e como fazer, acho fácil.
	1	Tenho muita dificuldade.
Acredita que em todos os segmentos que cursou aprendeu tudo o que lhe foi ensinado na disciplina de Matemática?	14	Sim
	13	Não
Quais espaços/momentos do seu dia-a-dia você aplica os conceitos Matemáticos apreendidos em sala de aula?	7	Comércio
	3	Em casa
	3	Somente na escola
	0	Nunca os utilizo
	14	Utilizo em todos os espaços/ momentos

Qual/quais momentos das aulas de Matemática você percebe que aprende melhor?	1	Quando o prof. utiliza material diferente
	9	Quando utiliza o quadro já é suficiente
	5	Quando utiliza metodologia diferente do dia a dia.
	12	Quando utiliza material e metodologia diferente do dia a dia.
Por que acha que deve aprender Matemática?	2	Prepara para a vida como nenhuma outra disciplina
	18	Desenvolve o raciocínio lógico de um modo geral
	2	Utilizo no meu dia a dia.
	4	Utilizo para fazer ENEM e para entrar na faculdade.
	1	É importante para o dia a dia.
*Das profissões listadas, quais delas acredita que utiliza algum conhecimento matemático?	5	Pedreiro
	1	Padeiro
	0	Professor de Língua Portuguesa
	0	Pastor
	8	Arquiteto
	0	Youtubers
	12	Todos eles
Ao ler um rótulo da embalagem ou manual de instrução de um produto, você acredita estar usando algum conhecimento matemático?	26	Sim
	1	Não
	0	Nunca

Questionário - perguntas e respostas dos discentes

* Um aluno marcou pedreiro, padeiro, arquiteto. Foi desconsiderado. Não foi computado.

Tabela elaborada pela autora.

As respostas dos alunos divergem das respostas dos professores quando perguntados sobre gostar e terem facilidade na disciplina de Matemática. A maioria dos pesquisados afirmaram gostar e ter facilidade enquanto que para os professores a maioria não gosta e não tem facilidade. Ao justificarem o porquê as respostas foram bem variadas. No quesito acreditar que aprendeu tudo o que lhe foi ensinado as respostas foram bem balanceadas, onde 14 afirmaram sim e 13 afirmaram não ter aprendido tudo. Na pergunta de número 4 os alunos demonstraram não compreenderem que a Matemática é utilizada em

todos os espaços, pois, 13 responderam em espaços específicos enquanto 14 afirmaram utilizá-la em todos os espaços/momentos, o que pode demonstrar que a interpretação dos 13 deixa a desejar.

Em relação à metodologia, na maioria das respostas, afirmaram perceber que aprendem melhor quando o professor utiliza um material e metodologias diferentes daquelas utilizadas no dia a dia. Mas, a observação das aulas condiz com os argumentos de D'Ambrósio (1989) ao afirmar que a metodologia ainda utilizada pelos professores nas aulas de Matemática se resume a "uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor".

Há muito que investigar na dinâmica do confronto entre os saberes docentes e as práticas pedagógicas especialmente quando se trata da disciplina de Matemática. Algumas pesquisas, como por exemplo, Brighenti et al (2015) apontam que as metodologias utilizadas pelos professores não são aquelas consideradas mais eficazes pelos alunos. No entanto, outras pesquisas como Sopelsa et al (2009) descrevem os problemas enfrentados pelos professores, argumentando de forma implícita o porquê da não utilização de metodologias diferenciadas. Dos problemas listados por esses autores como a falta de tempo para desenvolver o trabalho coletivo, excesso e múltiplas atividades a serem desenvolvidas, carga horária exagerada e os saberes que emergem de questões emocionais e humanas no processo de ensinar e aprender dentre outros, foram observados nas investigações da presente pesquisa. Esses autores finalizam apontando a necessidade de uma revisão urgente dos cursos de formação de professores, além disso, sobre a formação continuada a pesquisa apontou que ela pouco ocorre e quando acontece enfatiza-se questões burocráticas. A fala dos professores aqui analisadas reforçam a existência dos problemas listados bem como as dificuldades enfrentadas na formação inicial e continuada do professorado.

Foi possível observar a necessidade de mais pesquisas que relacionem a formação inicial e continuada dos professores de Matemática e sua relação direta com o aprendizado do aluno bem como a análise mais detalhada de como e se os alunos aplicam os conhecimentos matemáticos adquiridos na escola em seu cotidiano.

Quanto aos problemas existentes na relação ensino aprendizagem da disciplina de Matemática foi explicitada aqui a necessidade urgente da utilização de metodologias diferentes que enfatizem o aluno como o centro do processo educacional, enxergando-o como um ser ativo no processo de construção de seu conhecimento (D'AMBRÓSIO, 1989, p. 16). A forma de compreender a aprendizagem matemática dos alunos pesquisados confere com D'Ambrósio (1989) ao relatar que o aluno credita seu papel passivo nesse processo gerando desinteresse e falta de criatividade inutilizando até mesmo pensar novos caminhos para se chegar a uma mesma solução de um problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos são os problemas existentes no ‘chão da escola’, especialmente se tratando de metodologias e a aprendizagem matemática. Quando se trata da formação inicial e continuada do professorado a situação se torna ainda mais crítica. O aprendizado de Matemática acontece em todos os espaços, no entanto, muitas vezes, ele se inicia na escola, na educação formal. E é lá que as metodologias devem ser revistas já que as utilizadas até hoje não atendem às expectativas do alunado e nem desenvolve a criatividade.

Variadas metodologias como a pesquisa (Muller e Nunes, 2015); a resolução de problemas, modelagem, a etnomatemática, o uso de computadores, jogos e a própria história da Matemática (D’Ambrósio, 1989); dentre tantas outras, são sugeridas (D’Ambrósio U. e D’Ambrósio B., 2006). Logo a pergunta é: Por que não usar? Uma das justificativas da não utilização está na formação inicial dos professores, pois ninguém promove a aprendizagem daquilo que não domina, e na formação continuada que na verdade não se caracteriza como continuada, “pouco formam, pouco valorizam e até por vezes desvalorizam os docentes” (GATTI, 2008; ALVARADO-PRADA et al 2010; MELLO, 2000). A competência como requisito incondicional para ser ‘competitivo social e economicamente’ recai sobre a prática docente que agrega valores, dinamismo e complexidade. Esse professorado que carece e solicita da formação continuada assuntos e questões referentes à didática de sala de aula, a conteúdos e metodologias para resolver situações do seu cotidiano, exatamente o preenchimento das lacunas formativas das quais foram privados.

A solução para uma formação de qualidade poderá ser a criação de uma estrutura flexível da formação, um modelo institucional que construa, ao longo do curso, o ‘perfil profissional docente que o país necessita’ para concretizar a ‘reforma da educação básica, consubstanciada em suas diretrizes curriculares nacionais, nos parâmetros curriculares recomendados pelo MEC e nas ações de empreendimentos iniciadas por estados e municípios’ (MELLO, 2000; IMBERNÓN, 2009).

Outras justificativas da não utilização de metodologias recaem sobre o excesso de atividades burocráticas desempenhadas pelos professores, ou seja, falta tempo; pelas dificuldades da transposição didática separadas dos conteúdos específicos, pela fragmentação curricular, pela prática pedagógica homogênea e tantas outras. A problemática enfrentada provoca desânimo. No entanto, faz-se necessário o enfrentamento destes, pois o processo educativo é complexo, contínuo, plural, heterogêneo e provêm de diversas fontes. O que impulsiona o dever do profissional professor em rever as estratégias e repensar sua prática diariamente, uma reelaboração constante dos saberes utilizados. Assim, vale ressaltar que quantidade não é qualidade e que o aluno deve sim ser o centro do processo educacional, ativo na construção de seu próprio conhecimento.

Dessa forma, pensar uma educação de qualidade requer mudança das políticas públicas, requer maior autonomia do profissional professor e um redirecionamentos dos

cursos de formação inicial e continuada. Propõe-se também uma mudança de postura dos professores formadores e do projeto pedagógico das instituições, e, nesse sentido, faz-se necessário uma diversidade curricular que atenda a complexidade cultural, social e econômica desse país.

Não seria então correto ensinar Matemática seria correto pensar Matemática, pois o pensamento nos torna reflexivos, pesquisadores e atentos a situações inovadoras que podem ser praticadas em sala de aula. Desse modo, a competência docente garante o gerenciamento do ensino e da aprendizagem no que concerne ao discernimento de quais conteúdos ministrar, bem como, sua sequência estará mais aguçada, legitimada e com maior credibilidade.

REFERÊNCIAS

ALVARADO-PRADA, Luis Eduardo; CAMPOS FREITAS, Thaís; FREITAS, Cinara Aline. **Formação continuada de professores: alguns conceitos, interesses, necessidades e propostas.** Revista Diálogo Educacional, [S.l.], v. 10, n. 30, p. 367-387, jul. 2010. ISSN 1981-416X. Disponível em: <https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/2464>. Acesso em: 26 jul. 2018. doi:http://dx.doi.org/10.7213/rde.v10i30.2464.

BRIGHENTI, Josiane; BIAVATTI, Vania Tanira; SOUZA, Taciana Rodrigues de. **Metodologias de ensino-aprendizagem: uma abordagem sob a percepção dos alunos.** Revista Gestão Universitária na América Latina - GUAL, Florianópolis, p. 281-304, nov. 2015. ISSN 1983-4535. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/gual/article/view/1983-4535.2015v8n3p281>. Acesso em: 26 jul. 2018. doi:https://doi.org/10.5007/1983-4535.2015v8n3p281.

D'AMBROSIO, Beatriz S. **Como ensinar matemática hoje?: Temas e Debates.** SBEM, ano II, n. 2, p. 15 - 19. Brasília, 1989. Disponível em: <http://educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA /Artigo_Beatriz.pdf>. Acesso em: 03 ago. 2018.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S.; D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Formação de Professores de Matemática: Professor-Pesquisador.** Atos de pesquisa em educação – PPGE/ME FURB ISSN 1809-0354 v. 1, nº1, p. 75-85, jan./abr. 2006. DOI: http://dx.doi.org/10.7867/1809-0354.2006v1n1p75-85 Disponível em https://proxy.furb.br/ojs/index.php/atosdepesquisa/article/view/65 Acesso em 02 ago. 2018

FREIRE, Madalena**. Educador, educa a dor**. Pg.. 48 à 53. São Paulo: Paz e Terra, 2010.

GATTI, Bernardete A. **Formação inicial de professores para a educação básica: pesquisas e políticas educacionais.** Tema em destaque. Est. Aval. Educ., São Paulo, v. 25, n. 57, p. 24-54, jan./abr. 2014. Disponível em http://www.fcc.org.br/pesquisa/publicacoes/eae/arquivos/1899/1899.pdf. Acesso em: 05 ma. 2019.

GATTI, Bernardete A.. **Análise das políticas públicas para formação continuada no Brasil, na última década.** Rev. Bras. Educ., Rio de Janeiro, v. 13, n. 37, p. 57-70, Abr. 2008. Available from <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-24782008000100006&lng=en&nrm=iso>. access on 25 abr. 2019. http://dx.doi.org/10.1590/S1413-24782008000100006.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação Permanente do Professorado: Novas Tendências**. Tradução de Sandra Trabucco Valenzuela. São Paulo: Cortez, 2009.

BRASIL, INEP. **Censo Escolar. Notas Estatísticas**. 2018. Brasília: INEP/Ministério da Educação, 2017. Disponível em http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/notas_estatisticas/2018/notas_estatisticas_censo_escolar_2018.pdf Acesso em 05 març. 2019.

BRASIL, Conselho Nacional de Educação. Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação inicial em nível superior (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados e cursos de segunda licenciatura) e para a formação continuada. Resolução CNE/CP n. 02/2015, de 1º de julho de 2015. Brasília, Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil, seção 1, n. 124, p. 8-12, 02 de julho de 2015. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/agosto-2017-pdf/70431-res-cne-cp-002-03072015-pdf/file

JUNQUEIRA, Sonia Maria da Silva.; MANRIQUE, Ana Lucia. **Reformas curriculares em cursos de licenciatura de Matemática: intenções necessárias e insuficientes.** Ciências. Educacionais. Bauru, v. 21, n. 3, p. 623-635, 2015. Disponível em http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v21n3/1516-7313-ciedu-21-03-0623.pdf Acesso em 03 set. 2018.

MELLO, Guiomar Namo de. **Formação inicial de professores para a educação básica: uma (re) visão radical.** *São Paulo Perspec.* [online]. 2000, vol.14, n.1, pp.98-110. ISSN 0102-8839. http://dx.doi.org/10.1590/S0102-88392000000100012.

MÜLLER, Daniel Ânderson; NUNES, Luciana Neves. **Ensino de Estatística no ensino médio noturno pela prática de uma pesquisa de campo.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v. 18, n. 3, p. 1245-1263, 2016. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/31482/21942. Acesso em: 03 ago. 2018.

SILVA, Elivane Leandro. **Reflexões sobre educação formal, informal e não formal. Um estudo de caso**. 35 f. Monografia (Graduação Licenciatura em Pedagogia). UNIP SP, Ceres, 2014.

SOPELSA, Ortenila; GAZZÓLA, Lucivani; DETONI, Marilena Zanoello. **A constituição dos saberes docentes no ensino da matemática: desafios do ensino e da aprendizagem.** In: IX CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO – EDUCERE III ENCONTRO SUL BRASILEIRO DE PSICOPEDAGOGIA. 26 A 29 de outubro de 2009 – PUCPR. Disponível em https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2009/2911_1179.pdf Acesso em 05 jul 2018.

VENTURINI, Fabio. **Série Aula Nota 10 – Técnicas de Doug Lemov. Profissão Mestre.** Abril 2011. Disponível em https://pt.slideshare.net/elislimaescapacherri/serie-aula-nota10-de-doug-lemov Acesso em 15 jul 2018.

CAPÍTULO 17

ENSINANDO MATRIZES, SISTEMAS LINEARES E DETERMINANTES USANDO UM APLICATIVO ONLINE

Data de aceite: 17/02/2021

Cristiane Martins Fernandes Tavares
UNIVASF, Juazeiro-BA

Edson Leite Araújo
UNIVASF, Juazeiro-BA

RESUMO: Este trabalho apresenta um estudo investigativo em torno da utilização de um aplicativo online, desenvolvido especificamente para o ensino de sistemas lineares, inversão de matrizes e cálculo de determinantes. O aplicativo explora o desenvolvimento destes conteúdos através do método de escalonamento de Gauss-Jordan. Os comandos são simples, autoexplicativos e o aplicativo conduz o aluno a decidir quais as operações necessárias para a resolução correta em cada uma das etapas do processo. O trabalho foi realizado através de uma pesquisa de campo, em duas turmas da segunda série do Ensino Médio, numa escola na cidade de Irecê-BA. Numa das turmas, aplicou-se uma sequência didática com o auxílio do aplicativo, enquanto na outra turma o ensino ocorreu de forma tradicional. A pesquisa teve abordagem qualitativa baseada em questionários, depoimentos, observações e análise dos resultados.
PALAVRAS-CHAVE: Ensino de matemática, Aplicativo online, Sistemas lineares, Inversão de matrizes, Determinantes.

TEACHING MATRIX, LINEAR EQUATIONS AND DETERMINANTS USING AN ONLINE APPLICATION

ABSTRACT: This work presents an investigative study around utilization of an online application, program developed specifically for teaching linear systems, matrix inversion and calculation of determinants. The application program explores these development of content using the Gauss-Jordan scheduling method. The commands are simple, self-explanatory and the application program leads the student to decide which operations are necessary for the correct resolution in each step of the process. The work was realized through a field research, in two classes of the second grade of High School in a school, in the city of Irecê-BA. In one class, a didactic sequence was applied using the application program, while in the other class teaching occurred in a traditional way. The research had a qualitative approach based on questionnaires, testimonies and observations and analysis of the results.
KEYWORDS: Mathematics teaching, Online application program, Linear systems, Matrix inversion, Determinants.

1 I INTRODUÇÃO

A investigação de estratégias didáticas que possam ser bem sucedidas para o ensino da matemática é algo desejável e o uso das tecnologias da informação pode ser interessante para melhorar a aprendizagem dos estudantes (MORAN, 2012). Nesta perspectiva, a utilização de tecnologias, representa um importante

instrumento nos processos de ensino e aprendizagem, uma vez que possibilita uma apresentação da matemática mais interativa e dinâmica. A inclusão da informática é tão importante que, de acordo com Borba (2017, p. 17), “o acesso à informática deve ser visto como um direito”. Para ele, o bom uso da informática em sala de aula pode estimular os estudantes a melhor compreensão de conceitos, o que conduziria a uma aprendizagem significativa. Incentiva ainda, o uso do computador em atividades em que o aluno leia, interprete, construa gráficos, conte, desenvolva noções espaciais e experimente.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em relação ao ensino da Matemática, prevê como uma de suas competências: “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão diferentes registros de representação (algébrico, geométrico, estatístico, computacional, etc.), na busca de solução e comunicação de resultados e problemas” (BRASIL, 2017, p. 533). Desta forma, incluir o registro computacional como um meio possível de utilização na abordagem de conteúdos matemáticos, evidencia o reconhecimento e a validade dessa estratégia de ensino.

Diante disso, os desafios enquanto professora da educação básica colocam-me na posição de investigar possíveis práticas educativas que possam auxiliar os estudantes na aprendizagem da matemática. Essa perspectiva de pesquisa está alinhada à corrente teórica que defende a inserção dos professores da educação básica como pesquisadores de suas próprias práticas. A proposta da pesquisa situada na sala de aula tem implicações importantes para as pesquisas em educação, a partir de problemas que são sentidos diretamente pelos professores no cotidiano escolar (MOREIRA, 1998; EL-HANI; GRECA, 2011; 2013).

Na busca de possibilitar aos estudantes da segunda série do ensino médio o desenvolvimento e exercício nos conteúdos expostos, esta pesquisa apresenta a seguinte questão norteadora: Como o uso de um aplicativo online, que demos o nome de *MatrixCalculator*, pode auxiliar o aluno da segunda série do ensino médio, na resolução de *sistemas lineares*, *inversão de matrizes* e *cálculo de determinantes*?

Esse trabalho tem como objetivo geral, verificar se o uso do aplicativo *MatrixCalculation* favorece a aprendizagem dos alunos e auxilia os professores no ensino de *sistemas lineares*, *inversão de matrizes* e *cálculo de determinantes,* utilizando o método de Gauss-Jordan. Como objetivos específicos, investigar a possibilidade do aplicativo contribuir para solucionar *sistemas de equações lineares* com um número finito de variáveis, simplificar o cálculo de *determinantes* e encontrar a *inversa* de uma matriz, buscando estabelecer uma relação entre tais conteúdos; aplicar uma sequência didática utilizando o método de Gauss-Jordan para ensinar os conteúdos mencionados; realizar um experimento comparativo entre duas turmas de segunda série do ensino médio.

2 | REFERENCIAL TEÓRICO

Uma análise do fazer pedagógico no cotidiano das escolas brasileiras, permite perceber que as dificuldades envolvendo a relação ensino-aprendizagem são diversas e significativas. As más condições de trabalho, a deficiência na oferta de formação continuada para professores, os currículos que muitas vezes se apresentam obsoletos e a dificuldade de aprendizagem dos alunos, são exemplos de desafios presentes no ambiente escolar do Brasil (SCHWARTZMAN, 2005).

No caso específico da matemática, oberva-se que, por muitas vezes, a disciplina é tida como uma das mais rejeitadas pelos estudantes. A importância do professor no processo de melhoria do ensino e da forma como o discente encara esta matéria, é notória. A matemática pode deixar de ser considerada um monstro, quando os professores buscarem desenvolver ações que despertem nos alunos a importância de relacionar os conceitos estudados com a sua vida social, levando-os a utilizar o raciocínio lógico decorrente de situações reais, a resolver diferentes tipos de problemas, estimulando, dessa forma, o pensamento independente (LARA, 2003).

Tendo em vista as dificuldades enfrentadas no ensino da matemática no Brasil, bem como a busca por melhorias, alguns documentos oficiais destacam estratégias para mais eficácia na relação ensino-aprendizagem. Sobre o ensino de *sistemas lineares*, as orientações curriculares para o ensino médio (BRASIL, 2008), recomenda o ensino da álgebra e da geometria paralelamente, buscando associar a resolução de sistemas de segunda ordem à posição relativa de duas retas no plano. Orienta, também, a resolução pelo processo de *escalonamento*, fazendo a interpretação de acordo com o número de soluções (uma solução, infinitas soluções, e nenhuma solução). Segundo o documento, a **regra de Cramer**, que é usada em geral e que depende do cálculo de *determinantes*, deve ser dispensada por se tratar de um processo trabalhoso e que só admite resolução para sistemas cujas matrizes são quadradas e com solução única. Ressalta ainda que o estudo dos *determinantes* poderia ser excluído.

No entanto, Lima (2007, p. 102) considera o significado matemático dos determinantes muito relevante. Como exemplo, cita sua importância na *álgebra* como "única função multilinear alternada das colunas (ou linhas) de uma matriz quadrada" e na *geometria*, corresponde ao volume de um paralelepípedo de *n* dimensões em que as colunas da matriz correspondem as arestas do paralelepípedo. Além disso, no ensino médio, vários cálculos são realizados com o auxílio dos *determinantes*. Em geometria analítica, por exemplo é usado para verificar a colinearidade de três pontos no plano, no cálculo de área de triângulos conhecendo as coordenadas dos seus vértices e na determinação da equação de uma reta conhecendo dois pontos (GIOVANNI at al., 2017).

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2017) o estudo da *álgebra* deve iniciar nos primeiros anos do ensino fundamental. Esta é uma das mudanças do documento em

relação aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1999), pois neste, o raciocínio algébrico é iniciado no 7º ano, e prevê que as situações problemas envolvendo equações devem ser exploradas e resolvidas com ou sem equações explícitas.

É também na BNCC, em sua *competência dois*, que se elabora a utilização de estratégias para a resolução de problemas, buscando a interpretação e resolução dos mesmos. Nesta competência, propõe-se desenvolver habilidade de "Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvam equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não *tecnologias digitais*" (BRASIL, 2017, p.528).

Nota-se, portanto, a importância destes conteúdos serem estudados de forma articulada, buscando o desenvolvimento das competências e habilidades destacadas. Vale salientar que os conteúdos abordados nesta pesquisa são imprescindíveis para a Álgebra Linear, disciplina de fundamental importância para abstrair e generalizar os assuntos relacionados (GRANDE, 2006 *apud* PERCEVAL, 2017), presente na grade curricular da grande maioria dos cursos superiores da área de exatas.

3 | A INFORMÁTICA COMO TENDÊNCIA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Os estudantes, nascidos entre 1998 e 2010, compõem o que se entende como "*geração z*", ou seja, os nascidos após o surgimento da internet e que, desde o nascimento, estão em contato com as novas tecnologias. Manuseiam computadores, celulares, *tablets*, dentre outros dispositivos tecnológicos, sem dificuldades e estão sempre buscando atualizações (TAPSCOTT, 2010). Em consequência, aulas tradicionais e sem a utilização da tecnologia, para esta geração, não raro perdem o sentido. Torna-se evidente portanto, a necessidade de inserção das tecnologias nas escolas. O uso das tecnologias proporciona um ambiente de integração entre professor, aluno e máquina, de forma que o aluno faz tentativas, ousa, arrisca, sem medo de errar (DANTE, 2016), além de garantir que as novas tecnologias contribuam para a modificação do ensino tradicional (BORBA, PENTEADO, 2007).

3.1 O Aplicativo

Em face do exposto, propomos o uso de um aplicativo, denominado *MatrixCalculation* (ARAÚJO, 2020), para auxiliar o aluno e o professor na relação de ensino-aprendizagem, no tocante à resolução de *sistemas lineares*, cálculo de *determinantes* e *inversão de matrizes*, que proporcione ao aluno a possibilidade de resolver problemas envolvendo os conteúdos abordados, desenvolver o raciocínio lógico na execução dos cálculos, melhorar a aprendizagem e, consequentemente, seu desempenho escolar, além de proporcionar aulas dinâmicas e interativas, sem a necessidade de memorização de fórmulas ou métodos complicados.

A princípio, o aplicativo foi desenvolvido em linguagem *javascript* para execução apenas em dispositivos com telas de tamanhos razoáveis (PCs, *notebooks*, *tablets*), mas com intenção futura de utilização também em celulares. Funciona em qualquer dispositivo que tenha um navegador instalado e acesso à internet. As resoluções abordadas pelo aplicativo usam o **método de escalonamento de Gauss-Jordan**, que consiste em reduzir a matriz dada através de operações básicas entre linhas a uma matriz diagonal equivalente (LIMA, 2016).

3.2 Usando o aplicativo

Nesta seção serão apresentadas as teclas, funções e características do aplicativo *MatrixCalculation*.

3.2.1 Resolução de Sistemas Lineares

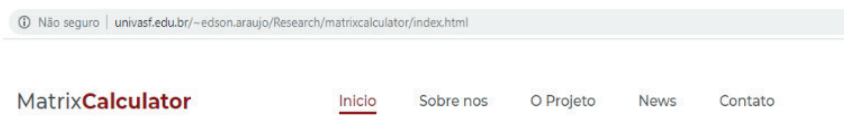


Figura 1–Interface inicial do aplicativo

Ao ser acessado, a página inicial contém um menu, com as abas de apresentação do projeto (Figura 1).

À direita há, ainda, um menu suspenso, no qual podem ser encontradas as opções principais do aplicativo: **Sistemas**, **Matrizes** e **Determinantes** (Figura 2).



Figura 2 – Menu principal do aplicativo

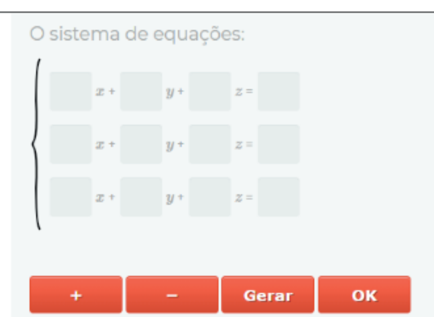


Figura 3 – Inserção do sistema linear

Ao clicar em *aprender* e tendo escolhido a opção "*Sistemas*", é aberta uma janela na qual o usuário pode inserir o sistema que deseja resolver (Figura 3).

O usuário tem à disposição os botões:

+	Aumenta o número de incógnitas. O aplicativo tem a opção de gerar sistemas com até 10 incógnitas.
–	Diminui o número de incógnitas.
Gerar	O aplicativo gera um sistema linear aleatório.
OK	Ao clicar este botão, o aplicativo solicita ao usuário que confirme o sistema que será resolvido e uma nova janela é aberta para o início da resolução.

Após ter inserido os dados do sistema, o aplicativo conduz o estudante por passos necessários à sua resolução de acordo com o *método de Gauss-Jordan*.

A entrada da matriz com bordas destacadas em *vermelho*, indica que esta é a entrada que corresponde ao objetivo atual do aplicativo. As operações permitidas devem ser escolhidas no menu à direita (Figura 4)

Ao clicar no botão iniciar, três opções são oferecidas:

- **Trocar:** troca duas linhas de posição;
- **Somar/ subtrair:** Adiciona ou subtrai duas linhas
- **Multiplicação:** Multiplica uma determinada linha por uma constante.



Figura 4 - Operações disponíveis

Como o objetivo é tornar o valor igual a 1 para entradas da diagonal e 0 para as demais, ao clicar na operação necessária para a realização, o usuário escolherá a linha e o cálculo a efetuar (Figura 5).

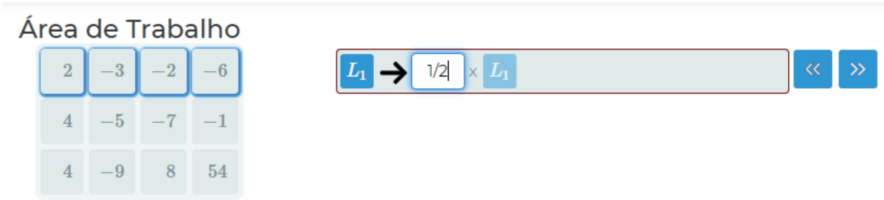


Figura 5 - Operação para tornar o elemento da diagonal principal igual a 1

Feita a escolha, o usuário deve pressionar o botão *prosseguir* (››) ou *retornar* (‹‹), caso tenha obtido resultado errado (Figura 6)



Figura 6 - Botões para condução retornar/prosseguir



Figura 6 - Destacandoa próxima entrada

Caso tenha alcançado o objetivo daquela entrada, as bordas desta tornam-se *verde* indicando o resultado correto e a próxima entrada alvo ganha bordas *vermelhas* (Figura 7).

As linhas selecionadas durante alguma operação têm as bordas de suas entradas destacadas nas cores *amarelo* e *azul* (Figura 8).



Figura 8 - Operações entre linhas

Este procedimento é repetido seguidas vezes, até que a matriz se torne uma matriz equivalente escalonada. Neste momento, o aplicativo mostrará uma mensagem indicando o final do procedimento (Figura 9) e, posteriormente, exibe uma tela com a resposta final do sistema.

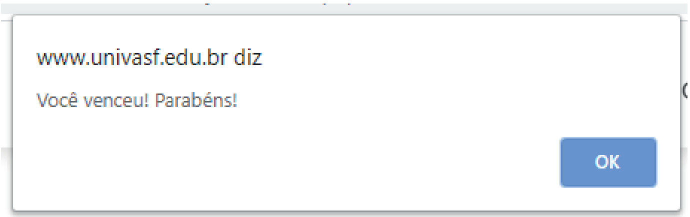


Figura 9 - Mensagem indicando a resolução correta

3.2.2 Inversão de Matrizes

Voltando à tela principal do aplicativo (Figura 2) e escolhendo a opção “matrizes”, o usuário tem acesso a parte do programa que lida com o processo de inversão de matrizes (Figura 10).

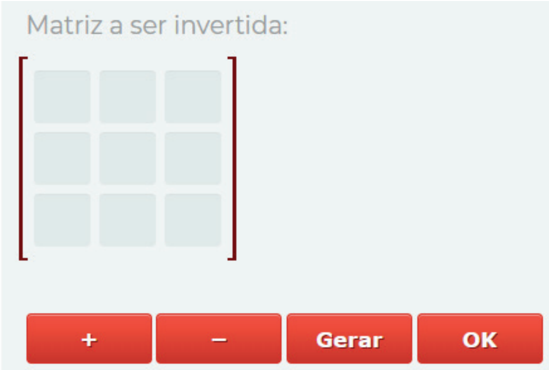


Figura 10 - Janela disponível para inserção da matriz e botões disponíveis

Novamente, o aluno terá à disposição os botões “+”, “- “, “Gerar” e “ok”, cujas funções são as mesmas já detalhadas na subseção anterior.

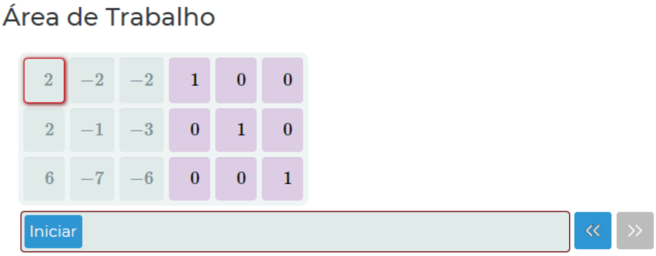


Figura 11 - Entrada em destaque para resolução

O processo de resolução é semelhante ao utilizado na resolução de sistemas. Neste caso, uma matriz identidade é posta do lado direito da matriz inserida. Ao escalonar a matriz dada, a matriz identidade será transformada na inversa que deseja-se encontrar (Figura 11).

O aluno determinará a matriz inversa de forma lúdica e prazerosa, obedecendo aos passos induzidos pelo aplicativo.

Assim como na resolução de sistemas, após a determinação da inversa, será exibida a mensagem parabenizando o usuário pelo sucesso na resolução desenvolvida e, após clicar em **ok**, a matriz inversa é apresentada numa nova tela (Figura 12). Nesta tela, é dada ao aluno a opção de visualizar o desenvolvimento executado na forma escrita (Figura 13). Esta opção do aplicativo é imprescindível para a sistematização do conhecimento, uma vez que permite ao educando conhecer e compreender as etapas integrantes para a resolução. A compreensão deste processo é de suma importância, pois para se obter uma aprendizagem significativa, é necessário que sejam capazes não apenas de apontar o resultado correto, mas que reconheçam e entendam os passos dados até alcançar o acerto, tornando-os mais capazes e autônomos no processo de aprendizagem.

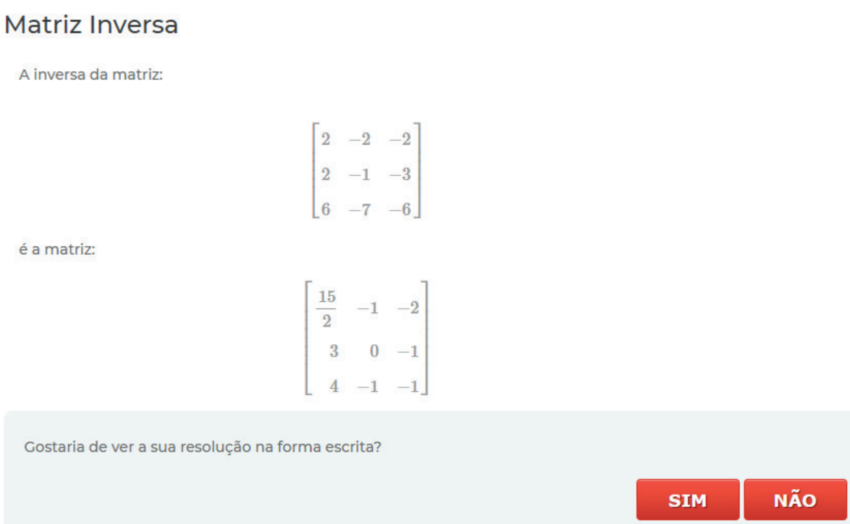


Figura 12 -Matriz Inversa determinada

Resolução:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 2 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 6L_1} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + 1L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 - 1L_1} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -2 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -\frac{5}{2} & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + 1L_2}$$

Figura 13 -Passo a passo da resolução

3.2.3 Cálculo de Determinantes

O Cálculo de determinantes aparece como terceira opção no menu suspenso, da tela de abertura do *MatrixCalculator* (Figura 2). De modo análogo às opções anteriores, ao clicar em “aprender”, o usuário terá acesso à tela de inserção dos dados da matriz que se deseja calcular seu determinante (Figura 14).

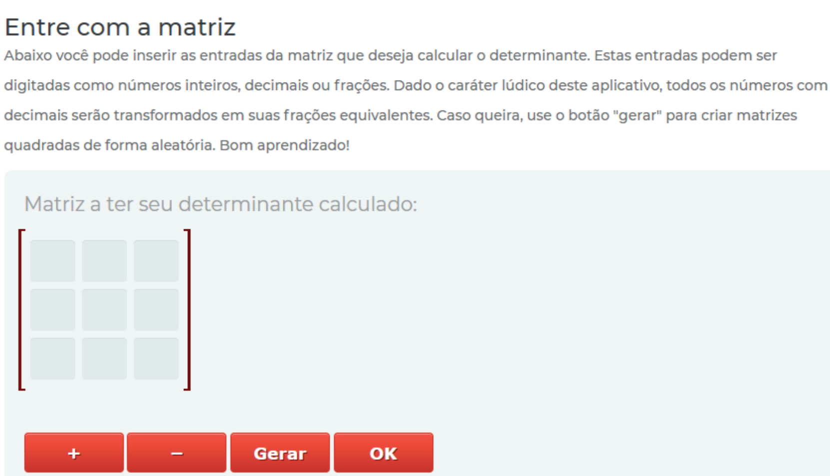


Figura 14 - Inserção dos dados

O aplicativo conduz o aluno, passo a passo, por um procedimento que equivale a um escalonamento *parcial,* em que se constrói uma matriz triangular superior equivalente e a partir desta, utilizando-se apenas o produto dos elementos da sua diagonal principal e o número de troca de linhas executadas (Figura 16), chega-se ao valor do determinante buscado (LIPSCHUTZ, 2011).

A entrada cujo valor aparece destacado em vermelho (1 ou -1) (Figura 15) é responsável por acumular o efeito que as trocas de linhas têm sobre o cálculo do determinante. Como se sabe, cada troca de linha, muda o sinal do valor do determinante. Desta forma, esta entrada possui valor inicial um.



Figura 15 -Entradas em destaque

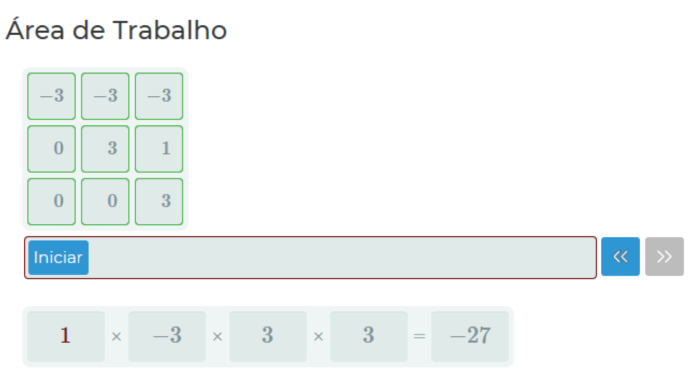


Figura 106 -Matriz triangular superiore cálculo do determinante

Assim como foi realizado no processo de resolução de *sistemas* e *inversão de matrizes*, o aplicativo exibe a mensagem final parabenizando o usuário pela execução correta da atividade e disponibiliza a resolução na forma escrita (Figura 17).

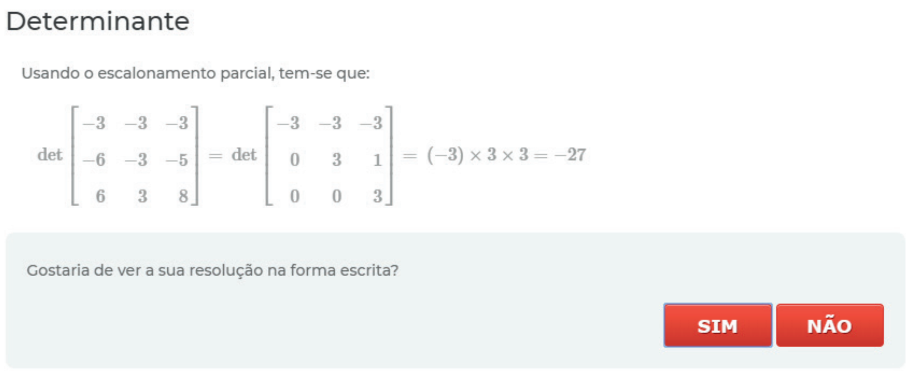


Figura 17 - Cálculo do determinante

Diante do exposto, percebe-se a simplicidade em manejar este aplicativo e sua utilidade no processo de ensino e aprendizagem, podendo ainda proporcionar aulas dinâmicas e interativas. O aplicativo permite a generalização de cálculos para matrizes de ordens superiores, facilitando a aprendizagem.

Destaca-se, também, que o *MatrixCalculator* oferece aos alunos a possibilidade de acesso não apenas ao resultado final dos problemas que envolvam o uso de *sistemas*, *matrizes* e *determinantes*, mas também que conheçam todo o processo resolutivo, tanto na forma interativa quanto na forma escrita. Deste modo, proporciona aos alunos desenvolverem suas próprias estratégias para solução de problemas, uma vez que não restringe a uma única maneira de alcançar o resultado correto.

4 I METODOLOGIA

A pesquisa foi realizada em duas turmas da segunda série do ensino médio, denominadas **turma A** (matutino) e **turma B** (vespertino), com 38 alunos em cada, com faixa etária entre 15 e 17 anos, numa escola na cidade de Irecê-BA, durante o segundo semestre letivo do ano de 2019. Em uma das turmas (**turma A**), o estudo foi feito de maneira tradicional, utilizando apenas o livro, caderno e exercícios no quadro. Na outra (**turma B**), os conteúdos foram transmitidos com uso do material didático, auxiliado pelo *MatrixCalculation* para os cálculos e desenvolvimento dos conceitos.

Ao longo de todo o processo, mantivemos em mente os aspectos que caracterizam uma pesquisa científica, que pode ser classificada de acordo com: *natureza* (qualitativa ou

quantitativa), *finalidade* (básica ou aplicada), *tipo* (descritiva ou experimental), *estratégia* (local de coleta dos dados/fonte de informação), *temporalidade* (longitudinal ou transversal) e *delineamento* (levantamento, correlação, experimento ou quase-experimento) (APPOLINÁRIO, 2015).

Quanto à *natureza*, esta pesquisa é *qualitativa*, dado que foi possível interpretar os resultados de acordo com a coleta de dados, observações e interações com os colaboradores da mesma.

No que diz respeito à *finalidade*, tem-se uma pesquisa *aplicada,* uma vez que busca a utilização de estratégias (construção e utilização de um aplicativo) para suprir a carência do grupo (aprendizagem significativa). Além disto, é do *tipo experimental*, pois uma turma foi submetida a aulas tradicionais e a outra a aulas com a ferramenta tecnológica. Em seguida, ambas passaram por atividades comparativas para verificação da eficácia da proposta de ensino. A escolha por uma pesquisa do tipo experimental parte da possibilidade que essa forma de investigação oferta aos pesquisadores de serem mais ativos.

Em relação à *estratégia*, os dados foram obtidos através da pesquisa de campo. Nesta coleta, buscou-se informações através de questionários comparativos e observações feitas durante a execução das atividades.

Pode-se classificar como longitudinal a *temporalidade* desta pesquisa, visto que o grupo de alunos foi submetido a atividades comparativas após o estudo de cada conteúdo. Por fim, o *delineamento*, se enquadra em um *experimento*. Sobre tais métodos, Appolinário (2015, p. 69) salienta que "os experimentos têm à característica de objetivar o estabelecimento das causas de um determinado fenômeno".

4.1 Diagnóstico e Nivelamento

A atividade diagnóstica destinou-se a contemplar o descritor 34 exigido na prova Brasil para o 9º ano do Ensino Fundamental (SAEB): identificar um sistema de equações do primeiro grau que expressa um problema. Neste momento, os alunos recordaram situações vivenciadas nesta série e tiveram a oportunidade de construir problemas com n variáveis. Após esta revisão, foi aplicada a Atividade didática I (TAVARES, 2020, Apêndice B). Os estudantes tiveram uma aula para responder as questões que solicitavam a identificação do sistema linear correspondente ao problema descrito. Os alunos responderam individualmente e sem qualquer orientação do professor pesquisador.

As atividades didáticas II e III (TAVARES, 2020, Apêndice B), também foram aplicadas nas duas turmas pesquisadas, porém foram realizadas em grupo, após a aula sobre *resolução de sistemas* de segunda e terceira ordens, respectivamente. Estas atividades tinham por objetivo verificar a aprendizagem e esclarecer as dúvidas surgidas, atentando para as dificuldades que os alunos apresentavam na resolução.

As principais dificuldades observadas foram:

- Interpretar o enunciado e transpor para a linguagem matemática.
- Identificar a operação correta entre as linhas da matriz para resolver corretamente o sistema.
- Dificuldade para efetuar cálculo com sinais e com frações.

Com a identificação dos problemas apresentados, iniciou-se a aplicação da sequência didática e, por conter maior quantidade de alunos com notas abaixo da média, optamos por ministrar na **turma B** as aulas com auxílio do aplicativo. Esta turma possuía alunos com bastante dificuldades de aprendizagem em matemática e alguns estavam desmotivados.

4.2 A Sequência Didática

Definidos os conteúdos, a série e a escola, iniciou-se a aplicação da sequência didática (TAVARES, 2020, Apêndice A), utilizando o **método de Gauss-Jordan**, para o estudo de resolução de *sistemas lineares*, seguido da *inversão de matrizes* e finalizando com o *cálculo de determinantes*, para uso em ambas as turmas. Este método foi escolhido, por ser o método utilizado no aplicativo e pela praticidade na resolução de problemas envolvendo matrizes de ordem qualquer. Foram planejadas 08 aulas para *resolução de sistemas*, 03 para *inversão de matrizes* e 03 para cálculo de *determinantes*.

Após o estudo de cada conteúdo em ambas as turmas, foi realizada uma atividade, contendo questões objetivas e discursivas, com o objetivo de comparar as estratégias utilizadas no ensino dos conteúdos.

4.3 Atividades Comparativas

A avaliação comparativa (TAVARES, 2020, Apêndice C) foi aplicada, de acordo com a sequência didática, após o estudo de cada conteúdo, com o objetivo de comparar o desempenho das turmas pesquisadas. Foi composta por 10 questões, retiradas de livros da segunda série do ensino médio (GIOVANNI at al., 2017; SOUZA, GARCIA, 2016; PENA, 2018), distribuídas da seguinte forma: 5 questões sobre *sistemas lineares*, 2 questões sobre *inversão de matrizes* e 3 questões sobre cálculo de *determinantes*.

Nesta, os principais pontos que foram analisados são:

- Realização das operações entre as linhas na resolução das atividades.
- Resolução de um sistema com coeficientes racionais.
- Classificação de um sistema linear.
- Determinação da inversa de uma matriz.
- Cálculo de determinantes e utilização das propriedades estudadas.

5 | RESULTADOS

De acordo com os objetivos desta pesquisa, após o estudo de cada conteúdo, os alunos de ambas as turmas foram submetidos às atividades comparativas, para que fosse possível analisar a aplicabilidade da sequência didática no processo de ensino-aprendizagem.

O resultado obtido revelou que a turma que utilizou o aplicativo (**turma B**) apresentou resultado superior à turma que utilizou apenas os métodos tradicionais (**turma A**) em todas as questões (Gráfico 1), mostrando o quanto o uso do aplicativo melhorou o desempenho da turma que, antes desta pesquisa, mostrava-se desmotivada e com um número elevado de alunos abaixo da média para aprovação.

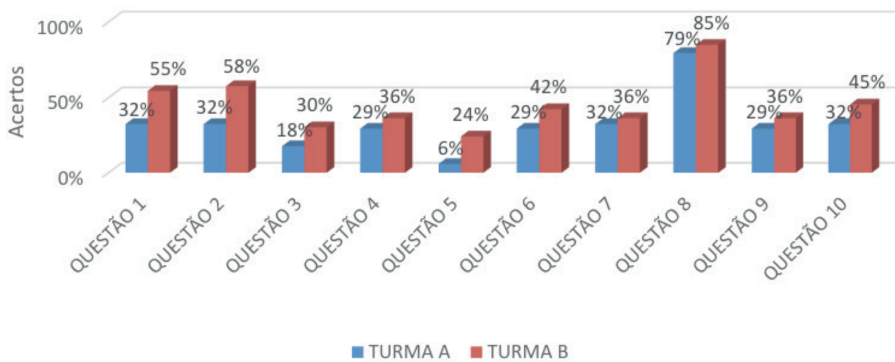


Gráfico 1–Desempenho das turmas na atividade comparativa

Fonte: Cristiane Tavares

Notou-se o avanço considerável nas dificuldades elencadas durante a etapa de nivelamento, acerca dos conteúdos vistos no Ensino Fundamental.

Após o estudo dos conteúdos desta pesquisa, tem-se a sensação de dever cumprido. Depoimentos como "professora, isso vicia", feitos por alunos que diziam não gostar de matemática e das observações realizadas durante o percurso, mostraram o quanto as aulas foram eficazes para a aprendizagem. Além disso, outros discentes responderam questões em casa e socializaram nas redes sociais, demonstrando o quanto estavam satisfeitos e empolgados com a utilização do aplicativo.

6 | CONCLUSÕES

A importância da diversificação de métodos no ensino pôde ser observada nos primeiros momentos de trabalho, uma vez que, na aplicação da sequência didática

desenvolvida para esse estudo, os alunos que sempre apresentaram dificuldades em matemática, demonstraram facilidade no uso da ferramenta e, em muitas situações, auxiliaram os colegas na identificação das operações necessárias para a resolução. A maior inclusão e participação mais ativa desses estudantes, beneficiou o desenvolvimento da autoestima, melhorando a aprendizagem e auxiliando no desejo em aprender o componente curricular.

A investigação da potencialidade desse aplicativo para a promoção da aprendizagem dos conteúdos supracitados foi realizada pela comparação dos resultados de aprendizagem na turma que utilizou o aplicativo durante as aulas e a turma que não fez uso dessa ferramenta didática. Uma vez que os resultados obtidos indicaram o melhor desempenho dos alunos que utilizaram o aplicativo, é possível concluir que o uso da ferramenta digital contribuiu de forma significativa para aprendizagem dos alunos, tornando-a mais efetiva e eficaz. Ao fim do processo, falando sobre o aplicativo, alguns estudantes relataram que ele "ajuda a aprender", "melhora a visualização" e "facilita o aprendizado". Tais expressões corroboram com a ideia de que o *MatrixCalculation* é um caminho possível para a melhoria do ensino de matemática.

Após a pesquisa efetuada, uma das hipóteses que levanto para essa eficácia do aplicativo no ensino desses conteúdos, é de que a sua utilização proporcionou aulas mais dinâmicas e participativas em relação às aulas aplicadas na forma tradicional. Por isso, ao utilizar a tecnologia, os alunos se apresentaram mais concentrados e as atividades proporcionaram o desenvolvimento do raciocínio lógico e o espírito investigativo, permitindo a extrapolação dos conteúdos, aguçando a curiosidade na resolução dos exercícios propostos.

A investigação de como o uso do aplicativo poderia contribuir, mostrou que seu potencial está diretamente relacionado às mudanças que essa ferramenta possibilita para a prática docente. Esse aplicativo possibilitou a melhora da qualidade das aulas, proporcionando um ambiente enriquecedor, propício à aprendizagem significativa, além de despertar a autonomia e a proatividade nos discentes, sem a necessidade de memorização de fórmulas ou métodos complicados.

Como projetos futuros, utilizarei o aplicativo nas próximas turmas de segunda série, no estudo de sistemas lineares em conjunto com o software *Geogebra*, através dos quais os alunos poderão, além de resolver o sistema linear, visualizar geometricamente a solução como forma de auxiliar sua interpretação. Além disso, como professora, pretendo aprofundar meus conhecimentos em relação ao uso da tecnologia em sala de aula, aprendendo a manusear outros aplicativos, transformando as aulas de matemática em momentos agradáveis, interativos e diversificados, despertando o interesse do aluno em estudar e aprender matemática.

REFERÊNCIAS

APPOLINÁRIO, Fábio. **Metodologia da Ciência: Filosofia e Prática da Pesquisa**. 2ª ed.; São Paulo: Cengage Learning, 2015.

ARAÚJO, Edson Leite. **MatrixCalculation**. Acessado em <http://www.univasf.edu.br/ ~edson.araujo/ Research/matrixcalculator/index.html> , 2020

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Mirian Godoy. **Informática e Educação Matemática**. 5 ed.; 3. Reip. – Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC,SEB, 2017.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**; volume 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC,SEB, 2008.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília: MEC/Semtec, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1 ed.; São Paulo: Ática, 2010.

EL-HANI, C. N.; GRECA, I. **Com Pratica: A Virtual Community of Practice for Promoting Biology Teachers Professional Development in Brazil.** RESEARCH IN SCIENCE EDUCATION, v. 43, p. 1327-1359, 2013.

EL-HANI, C. N.; GRECA, I. **Participação em uma Comunidade Virtual de Prática Desenhada como Meio de Diminuir a Lacuna Pesquisa-Prática na Educação em Biologia. Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 17, p. 579-601, 2011.

GIOVANNI, José Ruy at al. **360º Matemática completa, 2**. 1 ed. São Paulo: FTD, 2017.

GIOVANNI, José Ruy at al. **360º Matemática completa, caderno de atividades: ENEM e vestibular, volume 2**. 1 ed. São Paulo: FTD, 2017.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática**. 1 ed. São Paulo: Rêspel, 2003.

LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 9ª ed.; Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. 3ª ed.; Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc. **Álgebra Linear**. 4ª ed.; Coleção Shaum. Porto Alegre: Bookman, 2011.

MORAN, José Manuel; MASSETTO, Marcos T.; LU BEHRENS, Maria Aparecida. **Novas tecnologias e mediações pedagógicas.** Campinas, SP. Papirus, 2012

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática Paiva 2** – 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2010.

PENA, Marcelo. **Pré-Universitario anual : Matemática e Ciências da Natureza**, turbo 6.0., livro II. Fortaleza: Moderna; Sistema Farias Brito de Ensino (SFB), 2018.

PERCEVAL, Valéria Oliveira. **Conteúdos de álgebra Linear: Metanálise de Pesquisas na área de Educação Matemática.** 2017. 35f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática). Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul, 2017. Disponível em <http://cursos.unipampa.edu.br/cursos/cienciasexatas/files/2018/01/tcc_valeriaoliveiraperceval.pdf> Acesso:13 out. 2019.

SCHWARTZMAN, Simon. BROCK, Colin. **Os desafios da educação no Brasil**. editores. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2005. Disponível em: <http://www.schwartsman.org.br/simon/de-safios/Sumario.html> Acesso: 25 fev. 2020.

SOUZA, Joamir Roberto de; GARCIA, Jacqueline da Silva Ribeiro. **# Contato Matemática**, 2º ano. 1 ed.; São Paulo: FTD, 2016.

TAPSCOOT, Don. **A Hora da Geração Digital**: **Como os jovens que cresceram usando a internet estão mudando tudo das empresas aos governos.** 1 ed.; Rio de Janeiro: Agir Negócios, 2010.

TAVARES, Cristiane Martins Fernandes. **Ensinando matrizes, sistemas lineares e determinantes usando um aplicativo online**. 2020. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Federal do Vale do São Francisco – UNIVASF. Juazeiro, BA. Ano de publicação: 2020 (previsão).

UNESCO. **Os desafios do ensino de matemática na educação básica.** – Brasília: São Carlos: EdUFSCar, 2016. Disponível em <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000246861> Acesso: 15 out. 2019.

CAPÍTULO 18

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E SOCIEDADE (CTS): PERSPECTIVA PARA UMA NOVA TENDÊNCIA

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 30/12/2020

Eliana Alves Arxer
Secretaria Estadual da Educação do Estado de São Paulo (SEESP)
Araraquara - SP
http://lattes.cnpq.br/0459958984072617

Dulcimeire Aparecida Volante Zanon
Universidade Federal de São Carlos (UFSCar)
São Carlos - SP
http://lattes.cnpq.br/1811225448261362

RESUMO: A abordagem de ensino baseada na perspectiva CTS (Ciência-Tecnologia-Sociedade) tem recebido destaque nas publicações da área de Educação, pois favorece a formação do pensamento crítico. Em muitas delas, está relacionada ao ensino dos seguintes componentes curriculares: Ciências (Ensino Fundamental), Química, Física e Biologia (Ensino Médio) e, com menor frequência, ao ensino de Matemática. Neste sentido, este trabalho visa ser inovador na medida em que retrata a prática reflexiva numa perspectiva CTS, articulada com conteúdos de Matemática, a partir da temática energia elétrica. Assim, o objetivo deste estudo consistiu em analisar as reflexões de uma professora ao abordar conteúdos de Matemática na perspectiva CTS. Para tanto, foi planejada e executada uma sequência didática junto a duas turmas de nonos anos de uma escola municipal do interior do Estado de São Paulo. O registro em vídeo de cada etapa da sequência didática realizada bem como os registros escritos foram analisados de forma qualitativa. Podemos afirmar que o planejamento e a execução de atividades com uso da estratégia de ensino CTS favoreceu a participação ativa dos estudantes, a interação entre eles com a professora e a aprendizagem de conteúdos interdisciplinares. Ao analisar a própria prática, a docente expôs a realidade no contexto educacional em que vive, considerando suas angústias, incertezas, assim como entusiasmo. Esses sentimentos foram desvelados ao rever sua postura por meio do processo ação-reflexão-ação que provocou uma revisão da própria prática e a busca de superação de ilusões pedagógicas e individualistas da atuação docente, embora reconhecemos que toda e qualquer mudança não é uma ação fácil. Pelo contrário, é processual, exige determinação e o desejo do desafio.

PALAVRAS - CHAVE: Perspectiva CTS; Ensino de Matemática; Tendência contemporânea; Formação continuada.

MATHEMATICS TEACHING THROUGH SCIENCE, TECHNOLOGY AND SOCIETY (STS): PERSPECTIVE FOR A NEW TREND

ABSTRACT: The teaching approach based on the STS (Science-Technology-Society) perspective is highlighted in publications in the Education area, as it favors the formation of critical thinking. In many of them, it is related to the teaching of the following curricular components: Science (Elementary School), Chemistry, Physics and Biology (High School) and, less frequently, in teaching Mathematics. In this sense, this work

aims to be innovative in that it portrays reflective practice in a STS perspective, articulated with Mathematics content, and based on the electric energy theme. Thus, the aim of this study was to analyze how a teacher's reflections when approaching Mathematics content in the STS perspective. To this end, a didactic sequence was planned and executed with two ninth-year classes from a municipal school in the interior of the State of São Paulo. The video recording of each stage of the sequence was carried out, as well as the written records were made qualitatively. We can say that the planning and execution of activities using the STS teaching strategy favored the active participation of students, an interaction between them with a teacher and the learning of interdisciplinary contents. When analyzing the practice itself, the teacher exposed the reality in the educational context in which she lives, considering her anxieties, uncertainties, as well as enthusiasm. These feelings were unveiled when reviewing his posture through the action-reflection-action process that provoked a review of the practice and a search for overcoming pedagogical and individualistic illusions of teaching performance, although we recognize that any and all change is not an easy action. On the contrary, it is procedural; it requires determination and the desire for challenge.
KEYWORDS: STS perspective; Mathematics teaching; Contemporary trend; teacher training continued.

1 I INTRODUÇÃO

O conhecimento científico e as novas tecnologias constituem-se, cada vez mais, condição para que as pessoas saibam se posicionar frente a processos e inovações que as afetam. Nesse sentido, a abordagem CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade) descortina-se como aliada nesse processo por considerar etapas que envolvem problematização, recursos e metodologias ativas de aprendizagem, além da abordagem tecnológica para a solução de problemas contextualizados.

Historicamente, a perspectiva CTS iniciou-se na década de setenta, marcada por um contexto calcado na crítica a um modelo de desenvolvimento científico e tecnológico, cujos efeitos começaram a afetar cada vez mais a vida das pessoas. Neste período, as orientações curriculares priorizavam, entre outros aspectos, a implementação de projetos CTS no sistema escolar de países europeus e nos EUA (SANTOS; MORTIMER, 2008).

Na década de oitenta, Ziman (1980), atribuído como criador da sigla CTS, destaca que o foco do Ensino de Ciências convencional, naquele período, era o de ensinar a ciência 'válida' (valid science), que é aquela produzida dentro dos padrões estabelecidos pela comunidade científica. Nesse âmbito, fatores externos não são considerados e o contexto social e político não entram em pauta. Para o autor, a intenção principal era treinar futuros cientistas, já que se priorizavam os conteúdos referentes ao estudo do conhecimento acumulado ao longo das gerações de pesquisadores de uma determinada área. Já na década de noventa, a preocupação com as questões ambientais e suas relações com a Ciência, Tecnologia e Sociedade fez ampliar o movimento, englobando o Ambiente (CTSA).

Pinheiro, Silveira e Bazzo (2007) afirmam que é possível identificar a importância do

enfoque CTS perante os questionamentos críticos e reflexivos acerca do contexto científico-tecnológico e social e, em especial, sua relevância para o Ensino. Este enfoque tem recebido destaque nas publicações da área de Educação, incluindo-se teses e dissertações, pois favorece a formação do pensamento crítico. Em muitas delas, está relacionada ao ensino dos seguintes componentes curriculares: Ciências (Ensino Fundamental), Química, Física e Biologia (Ensino Médio) e, com menor frequência, ao ensino de Matemática.

A tendência sobre estudos relacionados à abordagem CTS, no aspecto científico-acadêmico, pode ser identificada junto ao Banco Digital de Teses e Dissertações (BDTD). Neste sentido, foi realizada uma busca atualizada[1] sobre essas publicações, em nível Nacional.

Ao utilizarmos o tema "CTS" na plataforma BDTD, especificação "todos os campos", obtivemos 718 resultados, sendo 546 dissertações e 172 teses que contemplam os diversos componentes curriculares. Ao acrescentarmos Matemática junto ao tema CTS na especificação "todos os campos", resultaram 127 publicações; ao refinarmos a busca, inserindo aspas nos termos "CTS" e "Matemática" na especificação "título", foram obtidos apenas 7 resultados.

O Quadro 1 apresenta a relação quantitativa de publicações (Teses e Dissertações), considerando-se o ano e a defesa, a partir da especificação "matemática" e "CTS", junto ao campo "título".

Ano	Número de publicações de Dissertações de Mestrado	Número de publicações de Teses de Doutorado	Total
2017	1	-	1
2015	2	-	2
2014	-	1	1
2012	1	-	1
2005	-	1	1
1994	1	-	1
Total de publicações	**5**	**2**	**7**

Quadro 1. Relação Quantitativa de publicações relacionadas a abordagem CTS junto ao ensino de matemática por ano de defesa.

Fonte: próprios autores.

Podemos inferir, de acordo com o referido quadro, que o número de dissertações (5) supera a quantidade de teses publicadas (2) com a referida temática. Além disso, há alternância sobre a categoria de publicações em cada ano. Portanto, as publicações

1 Busca realizada em 29 de dezembro de 2020, disponível em https://bdtd.ibict.br/vufind/

com abordagem CTS, junto à matemática, ainda são pouco frequentes, mas com grande potencial para se tornar uma tendência no ensino contemporâneo e futuro.

No Quadro 2 que segue, apresentamos as descrições das publicações relativas ao Quadro 1. São publicações cujos temas "matemática" e "CTS" constam no título da pesquisa. Além disso, são descritos os títulos, nome dos autores, ano de Defesa e categoria de publicação.

Título	Autor	Ano de Defesa	Categoria
A contextualização da matemática a partir da abordagem CTS na perspectiva da educação matemática crítica	Sbrana, Maria de Fátima Costa	2017	Dissertação
O ensino de matemática na perspectiva CTS: ações e reflexões de uma professora	Arxer, Eliana Alves	2015	Dissertação
Educação CTS em livros didáticos: da análise à aproximação com a modelagem matemática	Cambi, Betina	2015	Dissertação
A modelagem em educação matemática na perspectiva CTS	Silveira, Everaldo	2014	Tese
Abordagem CTS e ensino de matemática crítica: um olhar sobre a formação inicial dos futuros docentes	Silva, Débora Janaína Ribeiro e	2012	Dissertação
Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino aprendizagem do conhecimento matemático	Pinheiro, Nilcéia Aparecida Maciel	2005	Tese
Ideia relacionada 'CTS': uma aposta no enfraquecimento das relações de poder na educação matemática	Abreu, Maria Auxiliadora Maroneze de	1994	Dissertação

Quadro 2. Publicações relativas a abordagem CTS junto ao ensino de Matemática

Fonte: próprios autores.

Embora haja poucas pesquisas cientificas na área de Matemática com a perspectiva CTS, estas revelam seu potencial para contribuir com o nível de criticidade dos estudantes e promover o interesse pelas Ciências (incluindo-se a Matemática), o que ajuda na resolução de problemas, nos confrontos de pontos de vista e nos processos de tomada de decisão.

2 | MÉTODO

A pesquisa, de cunho qualitativo, envolveu 42 estudantes de duas turmas de nono ano com idades entre 14 e 17 anos de uma escola municipal de ensino fundamental, pertencente a uma cidade do interior do Estado de São Paulo.

A partir da análise das publicações de artigos científicos em periódicos renomados na área, elaboramos a Figura 1 que retrata as etapas não lineares de atividades com a abordagem CTS. Assim, optamos por iniciar com a abordagem da temática (energia elétrica) e, em seguida, com a questão social. Após, destacamos a importância do estudo de conteúdos de Matemática articulados com a temática, por meio de estratégias diferenciadas e a finalização, que requer a escrita dos envolvidos, como forma de "feedback".

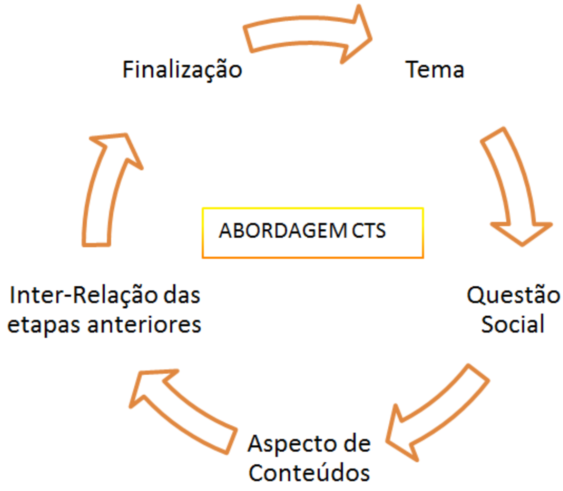


Figura 1. Etapas não lineares do ciclo de abordagem CTS

Fonte: ARXER (2015).

A partir da Figura 1, elaboramos uma proposta de atividades em seis etapas, com recursos metodológicos diversificados, conforme Quadro 3.

1-Tema: Tempo utilizado: 1 aula de 50min - *Objetivo:* Contextualizar o assunto e a temática: Energia elétrica e ano internacional da luz. / Leitura de Texto informativo/ Charges / Roda de conversa;
2- Questão social: Tempo utilizado: 1 aula de 50min - *Objetivo:* Construir questões com impacto social e definir uma representativa para investigação: Questão para investigação do 9ºA: "O que podemos fazer para evitar os apagões? E quais as fontes de energia alternativas seriam melhores para a sociedade e o meio ambiente?"; Questão para investigação do 9ºB: "O que seria do mundo moderno sem energia elétrica?"
3- Aspecto tecnológico: Tempo utilizado: 4 aulas de 50min - *Objetivos:* Relacionar a tecnologia ao tema; Investigação sobre as tecnologias envolvidas no processo de geração de energia elétrica e fontes alternativas de geração de energia (atividade de pesquisa no laboratório de informática) / Seminários / Filme "De onde vem?"
4- Aspecto de conteúdos: Tempo utilizado: 4 aulas de 50min - *Objetivos*: Abordar conteúdos de matemática articulados com a temática; - Como se calcula a conta de energia elétrica?; - Estudo dos conceitos matemáticos envolvidos: cálculo de conta; gráficos; média simples; Interpretação de problemas gerados a partir dos alunos; problemas contextualizados com a realidade da classe;; - Entendendo a realização de cálculo da conta de energia elétrica residencial dos próprios alunos, a partir dos três tipos de bandeiras.
5- Inter-relação das etapas anteriores: Tempo utilizado: 5 aulas de 50min - *Objetivos:* Utilizar estratégias de ensino diversificadas a fim de favorecer a apropriação de conhecimentos pelos alunos. (Proposta 1 - Debate ou teatro com prós e contras a uma ideia proposta a partir da observação dos alunos; Proposta 2 - Jogo relacionado aos conceitos CTS; Proposta 3 - Palestra com um profissional da área).
6- Finalização: Tempo utilizado: 1 aula de 50min - *Objetivos:* Realizar um feedback de todas as etapas e obter dados escritos dos envolvidos a partir de questionários. / Roda de conversa e discussão dos principais tópicos da aprendizagem acerca da temática/ - Aplicação de questionário junto aos alunos.

QUADRO 3. Etapas desenvolvidas na perspectiva CTS

Fonte: próprios autores.

Para este trabalho, daremos ênfase à etapa 4 (aspecto de conteúdos). Os instrumentos de obtenção de dados foram: 1) o diário de bordo da professora utilizado antes e depois de cada etapa; 2) as gravações em vídeo que auxiliaram na identificação de evidências que contemplassem os pressupostos CTS com foco na interação teoria-prática; relação aluno-professor e possíveis outras contribuições.

3 | RESULTADOS

A etapa 4 foi realizada em duas seções. Na primeira, houve interpretação e discussão dos dados constantes numa conta de energia elétrica com construção de gráficos. A segunda diz respeito à problematização/construção de exercícios relacionados com aparelhos elétricos, tempo de uso e consumo. Também houve questionamento sobre o tempo e o número de banhos de cada estudante com a finalidade de se construir uma tabela. Após isto, foi realizado o cálculo para cada bandeira de consumo para um dia, uma semana, um mês e um ano. Considerando-se um chuveiro com potência de 6.000W, a professora solicitou aos alunos que calculassem seus gastos para cada bandeira e para cada tempo/período. Em seguida, os dados foram transpostos na forma de gráfico. Dentre os conteúdos abordados destacam-se: cálculos com números reais; multiplicação e soma

de números racionais; arredondamentos e comparações. Por fim, foi promovida uma reflexão sobre a relação dos valores obtidos com a qualidade de vida em alguns países como Noruega, Canadá, Estados Unidos, Austrália e Bélgica, bem como sobre os impactos no meio ambiente.

Esta etapa demandou certo tempo (de 4 a 5 aulas) para o alcance dos objetivos propostos. De forma interdisciplinar e contextual, os conteúdos de Matemática tiveram uma relação direta com os da Física e, dessa forma, despertou o interesse dos estudantes, potencializou seu pensamento crítico ao denotar conhecimentos tangíveis à sua realidade. Dessa forma, a contextualização auxiliou na interpretação e aplicação de conteúdos que antes eram vistos apenas como científicos e não aplicáveis para alguns deles.

Concordamos com Pinheiro (2005) ao afirmar que

> a matemática não se utiliza somente da tecnologia; ela gera ciência e tecnologia e interfere no contexto social. Penso que seja necessário desmitificar a matemática, para que ela não seja considerada um mero instrumento de cálculo para os outros conhecimentos, irrelevando a sua responsabilidade no contexto social. Por meio do enfoque CTS, poder-se-á ressaltar aos alunos que não basta conhecer as origens do conhecimento matemático e suas influências sobre a sociedade. Nossos alunos precisam discutir essas influências e posicionarem-se frente às informações que recebem (PINHEIRO, 2005, p.20).

Dentre as ações da professora, houve esforço em utilizar uma postura investigativa e, para tanto, um processo de vigiar-se constantemente para não dar a resposta certa do ponto de vista da ciência, mas aprender a ouvir, acolher e ajudar a estruturar os raciocínios. Nesse sentido, os alunos estiveram mais à vontade para discutir e socializar diferentes opiniões. Assim, houve espaço para a argumentação.

Os resultados indicaram que houve denotações em um diário de bordo e, de acordo com ele, foi possível enumerar benefícios em uma reflexão sobre a própria prática, como exemplo, ser mais oitiva, não dar as respostas prontas antes que o aluno possa refletir sobre a situação problema; utilizar recursos tecnológicos para a preparação das aulas; e principalmente refletir sobre a própria prática para a tomada de decisões.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ponderamos, a partir deste trabalho, que foi possível identificar algumas categorias que apontam para uma melhoria no ensino e na aprendizagem de matemática com a abordagem CTS como: saber ouvir os alunos e interagir com eles; saber conduzir a discussão para construção coletiva; superar a ideia de explicar e controlar e da fragmentação do conteúdo; contextualizar para auxiliar na interpretação e aplicação de conteúdos de matemática; motivar a participação dos alunos ao argumentar e defender uma ideia, provocar motivação; estar aberta às opiniões, sugestões e críticas dos envolvidos.

Esses elementos derivam de uma nova concepção de ensino de matemática, cuja

tendência é ter foco sobre o aluno como protagonista de sua própria aprendizagem, a partir de estratégias didático-pedagógicas que proporcionem sua participação nas atividades, de forma prazerosa, contextualizada, crítica e reflexiva sobre os problemas do cotidiano. Nesse sentido, trabalhar os conteúdos da matemática na abordagem CTS requer um planejamento de estratégias e mudanças em relação ao ensino tradicional (cujo foco é o professor).

Na abordagem CTS o ensino e a aprendizagem se complementam, as estratégias de ensino representam o caminho, enquanto os conteúdos são abordados com problematizações e requerem do estudante a pesquisa, o envolvimento e a dedicação coletiva. Com este trabalho, foi possível deslumbrar esses aspectos e incluir o estudo da própria prática, enquanto docente em formação contínua (em serviço) e, dessa forma, planejar ações futuras.

Nesse sentido, a abordagem CTS não se finaliza com o encerramento de uma pesquisa, mas amplia-se em horizontes, espaços e temas didáticos ainda não explorados para os docentes que objetivam a melhoria de qualidade do ensino e da aprendizagem de matemática. A partir desta perspectiva, acreditamos que a abordagem CTS é uma tendência inovadora para o ensino de matemática no século XXI.

REFERÊNCIAS

ABREU, M. A. M. de. **Ideia relacionada ‘CTS’: uma aposta no enfraquecimento das relações de poder na educação matemática**. 1994. 162 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1994.

ARXER, E. A. **O ensino de matemática na perspectiva CTS: ações e reflexões de uma professora**. 2015.168f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação), UFSCAR, São Carlos, 2015.

CAMBI, B. **Educação CTS em livros didáticos: da análise à aproximação com a modelagem matemática**. 2015. 195 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

PINHEIRO, N. A. M. **Educação Crítico-Reflexiva para um Ensino Médio Científico-Tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático**. 2005. 306 f. Tese (Doutorado em Educação Cientifica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

PINHEIRO, N. A. M.; SILVEIRA, R. M. C. F., BAZZO, W. A. Ciência, Tecnologia e Sociedade: A relevância do enfoque CTS para o contexto do Ensino Médio. **Ciência & Educação**, v. 13, n. 1, p. 71-84, Bauru 2007.

SANTOS, W. L. P. dos; MORTIMER, E. F. Educação científica e humanística em uma perspectiva Freireana: resgatando a função do Ensino CTS. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**. v. 1, n. 1, p. 109-131, mar. 2008.

SBRANA, M. de F. C. **A contextualização da matemática a partir da abordagem CTS na perspectiva da educação matemática crítica**. 2017. 145 f. Dissertação. (Dissertação de Mestrado em Ensino e História de Ciências e Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017.

SILVA, D. J. R. e. **Abordagem CTS e ensino de matemática crítica: um olhar sobre a formação inicial dos futuros docentes**. 2012. 167 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2012.

SILVEIRA, E. **A modelagem em educação matemática na perspectiva CTS**. 2014. 203 f. Tese (Doutorado em Educação Cientifica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2014.

ZIMAN, J. **Teaching and learning about science and society**. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. 74 p.

CAPÍTULO 19

UM PROJETO DE PESQUISA DE ENSINO DE MATEMÁTICA PENSADO PARA O ALUNO DEFICIENTE VISUAL DO INSTITUTO FEDERAL DO PARANÁ - IFPR

Data de aceite: 17/02/2021

Data de submissão: 03/01/2020

Adriana Stefanello Somavilla
Instituto Federal do Paraná (IFPR)
Foz do Iguaçu – Paraná
https://orcid.org/0000-0002-4368-5658

Luani Griggio Langwinski
Faculdade de Ensino Superior de São Miguel do Iguacu - Uniguaçu (FAESI)
São Miguel do Iguaçu – Paraná
https://orcid.org/0000-0002-1064-143X

Leonardo Silguero Pimentel
Colégio Estadual Presidente Castelo Branco
Foz do Iguaçu – Paraná
https://orcid.org/0000-0002-0190-4082

A primeira versão deste trabalho foi publicada na Ensino e Tecnologia em Revista, v.4, n.1, p.36-47, jan/jun2020. Disponível em: < https://periodicos.utfpr.edu.br/etr/article/view/10994>

RESUMO: Promover a inclusão dos deficientes visuais em instituições de ensino, é um dos desafios vivenciados pelos professores de matemática do século XXI. Nesse sentido, foi desenvolvido em 2019, o projeto de pesquisa intitulado Ensino de matemática para o deficiente visual, no Instituto Federal do Paraná (IFPR), campus Foz do Iguaçu. Assim, na equipe proponente do projeto estiveram envolvidos professores de matemática do Grupo de Pesquisa em Educação, Ciências e Matemática (GPECiM)/IFPR, além da colaboração do aluno deficiente visual do curso Técnico em Informática e das acadêmicas do curso de Licenciatura em Física desse campus. Nessa perspectiva, foram elaborados materiais didáticos, estratégias didáticas e recursos instrucionais que promovessem o ensino e aprendizagem dos conceitos de matemática para estudantes com deficiência visual. Por fim, pode-se dizer que o projeto contribuiu tanto para aproximação da relação professor/aluno, quanto na formação das acadêmicas e professores de matemática e suas dificuldades em lidar com determinadas deficiências, mediando assim, o processo de inclusão necessário e possível nas aulas de matemática.

PALAVRAS - CHAVE: Inclusão. Deficiente visual. Ensino - matemática. Projeto de pesquisa.

A MATHEMATICS TEACHING RESEARCH PROJECT DESIGNED FOR THE VISUALLY IMPAIRED STUDENT AT THE FEDERAL INSTITUTE OF PARANÁ – IFPR

ABSTRACT: Promoting the inclusion of the visually impaired in educational institutions is one of the challenges experienced by 21st century mathematics teachers. In this sense, a research project entitled Teaching mathematics for the visually impaired was developed in 2019, at the Federal Institute of Paraná (IFPR), Foz do Iguaçu campus. Thus, the team proposing the project involved mathematics teachers from the Research Group on Education, Sciences and Mathematics (GPECiM) / IFPR, in addition to the collaboration of the visually impaired student in the Technical

course in Informatics and the students in the Physics Degree course of that campus. From this perspective, didactic materials, didactic strategies and instructional resources were developed to promote the teaching and learning of mathematics concepts for visually impaired students. Finally, it can be said that the project contributed to the approximation of the teacher / student relationship, as well as to the formation of academics and mathematics teachers and their difficulties in dealing with certain deficiencies, thus mediating the necessary and possible inclusion process in classes of math.
KEYWORDS: Inclusion. Visually impaired. Mathematics teaching. Research project.

1 I INTRODUÇÃO

No ano de 2018, o Instituto Federal do Paraná (IFPR), Campus Foz do Iguaçu, recebeu o seu primeiro aluno cego. A inclusão educacional é um direito do aluno e requer mudanças na concepção e nas práticas de gestão, de sala de aula e de formação de professores, para a efetivação do direito de todos à escolarização. A instituição já havia vivido a experiência de ter na graduação um aluno com baixa visão, mas nunca de um aluno com cegueira total. O acontecido trouxe um sentimento de preocupação por parte da equipe pedagógica e de desconforto aos professores, pois estes últimos não se sentiam preparados para atendê-lo. Desde então, houve a mobilização de todos. Muitos foram os projetos de ensino e pesquisa desenvolvidos, envolvendo professores, alunos e equipe pedagógica, a fim de melhorar e capacitar o atendimento ao aluno deficiente visual. De acordo com Amorim e Santos (2017, p. 6)

> Proporcionar condições pedagógicas para o ensino de alunos com deficiência visual é um desafio para qualquer professor que esteja envolvido com esse processo, e para o ensino de matemática, isso se torna mais evidente [...] Portanto, se faz necessário o empenho do professor para o desenvolvimento de novas técnicas e/ou metodologias de ensino que facilite a aprendizagem do estudante.

E foi diante desses desafios e necessidades próprias do ensino de matemática, que emergiu o interesse em possibilitar ao aluno com deficiência visual a oportunidade de acesso aos conteúdos não apenas pela audição, mas utilizando outros recursos didáticos adequados para que possa ter acesso aos elementos da matemática, por outros sentidos, devendo ser esta a preocupação primeira dos profissionais da área da educação.

Este trabalho tem como propósito apresentar o projeto de pesquisa que iniciou em abril de 2019, intitulado “Ensino de matemática para o deficiente visual”, que foi desenvolvido no IFPR, do qual fizeram parte integrantes do Grupo de Pesquisa em Educação, Ciências e Matemática (GPECiM/IFPR), acadêmicas de Licenciatura em Física e o discente com deficiência visual do curso Técnico em Informática. Ainda que o projeto trabalhasse a compreensão dos conceitos sobre matemática básica, trigonometria, geometria plana e espacial, por hora nos detivemos a falar sobre trigonometria, que foi o primeiro conceito abordado e desenvolvido.

Para tanto, organizamos o texto trazendo primeiramente um relato do colaborador e deficiente visual assistido pelo projeto, seguido de um breve contexto sobre o ensino de trigonometria. Posteriormente descrevemos os procedimentos metodológicos e o desenvolvimento do projeto e, encerramos trazendo algumas considerações.

2 | PALAVRAS DE UM ALUNO DEFICIENTE VISUAL[1]

Vivemos em um mundo onde a maioria das informações são extremamente visuais e com a matemática, não é diferente. Seu ensino geralmente se dá através de retas, gráficos e figuras, por exemplo. Quando um professor de matemática se depara com um discente portador de deficiência visual,normalmente leva um choque inicial, questionando-se sobre como tornará um conteúdo, que é essencialmente formado por representações visuais, acessível para aquele aluno. Devo ressaltar que o discente portador de deficiência visual parcial, geralmente tem uma boa noção das formas dos conteúdos, ele tem uma noção relativamente boa do formato de um gráfico, muitas vezes, é capaz de localizar todas as informações contidas nele, contudo, isso não acontece com um deficiente visual total (aquele que perdeu a visão quando criança, antes de iniciar seus estudos). Este, geralmente não tem noção de algumas coisas que, para uma pessoa normovisual são básicas, como reconhecer um polígono regular apenas por sua representação conceitual.

Quando ingressei no IFPR, não foi diferente, o impacto foi maior principalmente pelo fato de eu ter tido três docentes da disciplina de matemática em um único ano, fato ocorrido devido a substituições de professores. Isso exigiu uma grande adaptação tanto de minha parte quanto (e principalmente) da parte de cada docente. Todos sempre se esforçaram e deram seu máximo para que eu tivesse um aprendizado igualitário, e sempre foram bem-sucedidos.

Sempre tive um ótimo desempenho na disciplina de matemática, porém, por muitas vezes não estive ao nível da turma em termos de domínio de conteúdo. Isso se deu pelo fato de todos os docentes lecionarem em mais de três turmas, logo, além de planejarem e prepararem as suas aulas, ainda precisavam se preocupar em realizar pesquisas, definir uma estratégia, montá-la e pô-la em prática comigo. Isso tomava muito tempo de ambos (docente e discente) e, por mais que eu tivesse um bom aproveitamento do que me era ensinado, algumas vezes não era suficiente para alcançar o desempenho dos colegas.

Com o surgimento do projeto isso mudou. As técnicas e atividades de ensino desenvolvidas pelos integrantes desse projeto contribuíram muito para que eu tivesse um bom desempenho e aprendizado. O projeto também foi um grupo de estudos, logo, cada integrante possuía uma maneira de pensar e analisar. A disponibilidade de tempo para pesquisas foi maior justamente por esse motivo. Além do mais, todas as ideias eram discutidas em conjunto, chegando então o grupo a um modo eficaz para a explicação clara

1 Esta seção está escrita em primeira pessoa, pois se trata do relato do colaborador e deficiente visual, referente as contribuições que o projeto trouxe para si e sobre o ensino e aprendizagem de matemática.

de um determinado conteúdo.

Nos encontros, que eram semanais, todos os conteúdos trabalhados em sala me eram explicados de maneira clara e demonstrados de forma tátil, possibilitando, a mim, compreender tanto a teoria, quanto a prática perfeitamente. Isso melhorou de uma forma incrível meu domínio dos conteúdos aprendidos. Sempre fui capaz de absorver todos os conteúdos, entretanto, absorvia apenas o básico, o suficiente para resolver os exercícios avaliativos cobrados pelos professores. Depois, com as diferentes formas de explicação e demonstração dos conteúdos, me sentia realmente apto para compreendê-los e aplicá-los sempre.

3 | SOBRE O CONTEXTO DO ENSINO DA TRIGONOMETRIA

O ensino de trigonometria sempre representou um desafio aos professores de Matemática (OLIVEIRA, 2006; SILVA, 2013). O ciclo da insegurança quanto ao conteúdo de trigonometria começa na Educação Básica, se agrava no meio acadêmico e no caso dos licenciados em Matemática, fica evidente a falta de conhecimento para conduzir tanto a trigonometria ministrada no Ensino Básico, quanto as disciplinas do Ensino Superior.

Sabe-se que nos séculos XV e XVI os conceitos trigonométricos foram evidenciados. Segundo Berlinghoff (2010, p.36), a lista de

> [...] funções trigonométricas (seno, cosseno, tangente, cotangente, secante, cossecante) se tornou padronizada. Novas fórmulas e novas explicações foram descobertas. No início, todo foco estava em triângulos esféricos, tanto na esfera celeste quanto na Terra. Então, pela primeira vez, também se começou a aplicar a trigonometria a triângulos planos.

Atualmente os alunos questionam a importância de estudar a trigonometria e qual sua utilidade para o futuro. Já no que diz respeito aos professores, percebe- se uma indiferença quanto a aplicação da trigonometria a outros campos da atividade humana (Música, Topografia, Engenharias, acessibilidade, etc.), reduzindo o ensino de trigonometria ao estudo dos triângulos.

Nesse cenário, a mudança dar-se-á quando o educador entender que seu papel transcende o ensino de tabelas trigonométricas e se utilize de ajustes pedagógicos. Nesse sentido, Mendes (2009, p.108-109) entende que “uma maneira de se aprender Matemática, é através de um ensino mais prático e dinâmico e a história da matemática pode ser uma grande aliada”.

Diante disso, o repensar no formato proposto aos cursos de Licenciatura sobre o ensino de Trigonometria é um caminho para amenizar as dificuldades encontradas na trajetória docente. Assim, nas orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais consta uma das habilidades para o ensino de trigonometria: “Compreender o conhecimento científico e tecnológico como resultado de uma construção humana em um

processo histórico e social, reconhecendo o uso de relações trigonométricas em diferentes épocas e contextos sociais.” (BRASIL, 2006, p.123).

Ainda em tempo, na perspectiva da inclusão, como viabilizar o ensino da trigonometria para um deficiente visual? Sabe-se que os conteúdos escolares privilegiam a visualização nas diversas áreas de conhecimento, e na matemática essa situação se agrava, pois, utilizam-se muitos gráficos e figuras. Além disso, o processo de inclusão na maioria das instituições de ensino enfrenta resistências em diversos setores da comunidade escolar. Alguns professores não levam em conta essa limitação, ou não se sentem habilitados para o uso de recursos didáticos essenciais ao ensino/aprendizagem dos alunos com deficiência visual. Assim, a utilização de materiais e recursos didáticos dão suporte ao ensino favorecendo uma prática pedagógica criativa e inovadora, além de fomentar as pesquisas sobre o ensino inclusivo nas escolas regulares.

Nessa direção, promover a discussão sobre a inclusão de deficientes visuais nas instituições de ensino faz parte de uma formação para a cidadania. Independente do contexto curricular, é preciso respeitar as diferenças e ressaltar as potencialidades, para que as mudanças sejam progressivas e significativas tanto para os deficientes visuais quanto para a equipe envolvida no processo educativo. Para Mantoan (1997, p.44)

> [...] as grandes inovações estão, muitas vezes, na concretização do óbvio, do simples, do que é possível fazer, mas que precisa ser desvelado, para que possa ser compreendido por todos e aceito sem outras resistências, senão aquelas que dão brilho e vigor ao debate das novidades.

Por fim, esse trabalho mostra que é possível atenuar as barreiras didáticas encontradas no ensino de trigonometria e promover o ensino inclusivo em matemática. A seguir, trazemos os objetivos do projeto e a metodologia utilizada.

4 | TRAJETÓRIA METODOLOGICA

O projeto aqui relatado teve como objetivo geral elaborar materiais didáticos, apresentando estratégias e recursos instrucionais que promovessem o ensino e aprendizagem dos conceitos de matemática para estudantes com deficiência visual, bem como promover a inclusão dos deficientes visuais no espaço do IFPR, buscando sensibilizar a comunidade acadêmica nessa perspectiva. Para tanto, os objetivos específicos foram: Construir material específico para o ensino dos tópicos de matemática: trigonometria, geometria plana e espacial para deficientes visuais; utilizar o Multiplano Pedagógico no Ensino de Matemática; compreender como se dá o processo do conhecimento matemático na perspectiva do deficiente visual; possibilitar as acadêmicas em Licenciatura em Física vivenciarem práticas inclusivas durante sua formação inicial.

Tal projeto foi pensado pela professora substituta, quando lecionou no ano de 2018 para a turma do Técnico em Informática, mas como o seu contrato era de apenas

seis meses, continuou atendendo o aluno como professora colaboradora. No entanto, foi apenas no ano de 2019 que o projeto foi submetido ao comitê de pesquisa e extensão, pela professora efetiva da turma, ganhando uma nova estrutura e novos integrantes.

A trajetória metodológica fundamentou-se na abordagem qualitativa (CARVALHO, 2006), e buscou com registros descritivos e analíticos das demandas do discente colaborador deficiente visual, criar e elaborar materiais didáticos que promovessem a compreensão dos conceitos sobre matemática básica, trigonometria, geometria plana e espacial. Para isso foram confeccionados materiais didáticos – como o círculo trigonométrico e os gráficos das razões trigonométricas, também foram utilizados o multiplano e o computador com o programa Dosvox que é um minisistema operacional, disponível para Windows, que dá a possibilidade de usar o computador normalmente, oferecendo com voz humana gravada, ferramentas comumente disponíveis nos sistemas operacionais: editor/leitor de textos, e-mail, twitter, calculadora, etc. O software pode ser baixado e distribuído gratuitamente.

O ciclo de aprendizagem foi baseado em três etapas: a fase de exploração, a fase de introdução do conceito e a fase de aplicação do conceito. Na fase de exploração, o discente trazia questões que ele não conseguia responder com o seu conhecimento prévio. Assim, as acadêmicas em Licenciatura em Física juntamente com os professores do grupo de pesquisa, estudavam e procuravam meios de responder tais questões, essa foi a fase de introdução do conceito e por fim, após estudar e/ou confeccionarem o material, faziam a aplicação do conceito. Os encontros com o aluno cego ocorreram semanalmente com as acadêmicas e quinzenalmente com a professora colaboradora externa.

Diante disso, a proposta de distribuição dos tópicos que foram abordados no projeto são trigonometria, geometria plana e geometria espacial, conteúdos estes que fazem parte da grade curricular de Matemática do segundo ano do Curso Técnico Integrado em Informática, no qual o discente estuda.

5 | RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesse processo mútuo de aprendizado, tanto os professores de Matemática da equipe quanto as acadêmicas de Licenciatura em Física pretenderam

> [...] estabelecer um processo de desenvolvimento profissional, caracterizando sua prática pedagógica como inovadora e criativa, baseada no uso e na análise dos materiais e recursos, considerando- os suportes do ensino. Nesta questão, o incentivo à formação continuada e a busca de aperfeiçoamento pessoal e profissional do professor são, sem dúvida, condições cruciais para experimentos e análises do grau de inovações advindas dos materiais (BAUMEL; CASTRO, 2003, p.106).

A etapa de aplicação do conceito foi constituída de três momentos, não obrigatoriamente seguindo sempre esta ordem: a leitura em braile dos conceitos

matemáticos que estavam sendo estudados, a exploração do objeto matemático em outra forma de representação que não fosse a escrita matemática e a explicação do aluno cego, falando sobre o que aprendeu. A Figura 1 mostra o aluno fazendo a leitura em braile dos ângulos notáveis: 30º, 45º, 60º, etc.

Os objetos matemáticos só se deixam reconhecer pelas suas representações (DUVAL, 2011), a escrita em símbolos – $\hat{A} = 30°$ – ou também conhecida como linguagem matemática; a fala, ou seja, a escrita em língua natural – ângulos são duas semirretas que têm a mesma origem, no vértice, e são medidos em grau (°) ou em radiano (rad) – e um gráfico – duas semirretas com a abertura do ângulo de 30° – por exemplo, são representações diferentes em que podemos representar o objeto matemático ângulo. Fazer uso de mais de uma representação para ensinar matemática, favorece ao aluno perceber o conteúdo estudado em suas diferentes formas apesar da sua abstração, possibilitando a aprendizagem em matemática de maneira profícua (COLOMBO; FLORES; MORETTI, 2008).



Figura 1: Leitura em braile das relações trigonométricas

Fonte: Autores (2019)

Sempre após a explicação dos conteúdos e explorado o material concreto, o aluno era instigado a falar sobre o que aprendeu por meio de exemplo. A Figura 2 mostra o aluno explicando na própria mão a classificação dos quadrantes no ciclo trigonométrico.

Nesse viés, os materiais confeccionados no âmbito do projeto apresentaram resultados significativos, uma vez que possibilitou ao aluno com deficiência visual aprimorar os outros sentidos, como o tato e a audição, por exemplo. Marcações dos graus do círculo trigonométrico foram feitas com a utilização de pedrinhas de strass – daquelas usadas

para confeccionar bijuterias e/ou ornamentar roupas, o desenho do contorno de figuras geométricas com barbante para ensinar os ângulos internos e externos, entre outros. Isto é, “o professor não precisa mudar seus procedimentos quando tem um aluno deficiente visual em sua sala de aula mas apenas intensificar o uso de materiais concretos, para ajudar na abstração dos conceitos” (FERRONATO, 2002, p. 49).

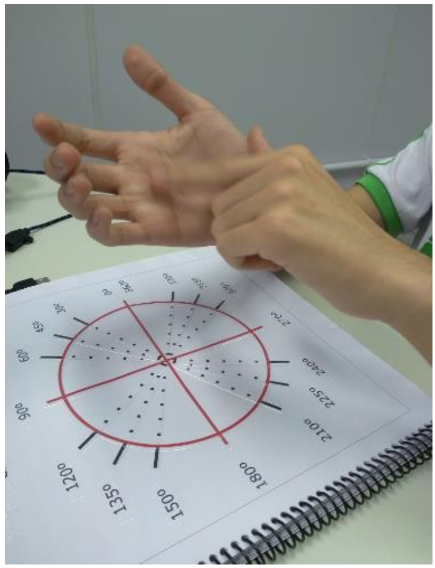


Figura 2: Explicação do discente sobre a classificação dos quadrantes

Fonte: Autores (2019)

A Figura 3 traz a apresentação na Mostra de Curso do IFPR de alguns dos materiais que foram utilizados no projeto para o ensino de trigonometria e geometria espacial.

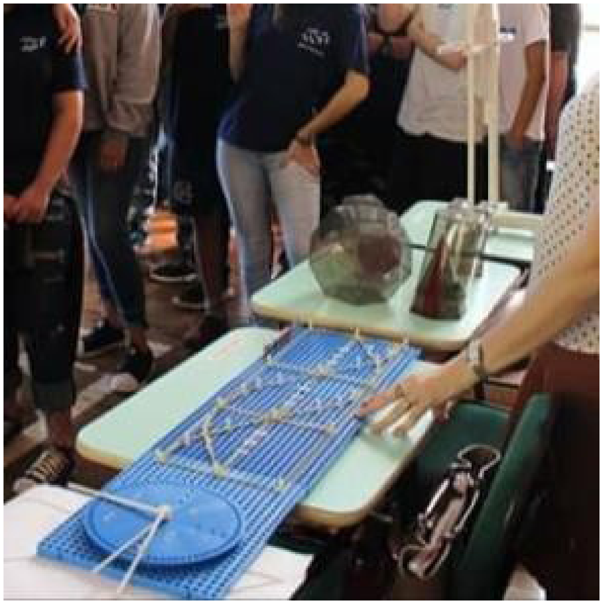


Figura 3: Apresentação na Mostra de Curso do IFPR

Fonte: Autores (2019)

A Mostra de Cursos do IFPR é aberta e tem como público alvo os alunos do 9º ano e do 3º ano do Ensino Médio que têm interesse em ingressar em algum curso do ensino técnico ou graduação oferecidos pelo IFPR. O nosso projeto também expôs na mostra alguns dos materiais desenvolvidos nas atividades com o discente deficiente visual. Os alunos que passaram pela mesa do projeto tiveram a oportunidade de aprender sobre trigonometria e observar o comportamento de alguns gráficos, que foram montados no multiplano.

6 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presença do discente com deficiência visual no IFPR trouxe desconfortos e inquietações e foi preciso ressignificar o papel do professor e da escola. A saída foi reconhecer as limitações e diferenças no espaço escolar e buscar soluções a partir de ações que recorressem a outros meios didáticos e metodológicos e, promovessem o indivíduo, para tanto, foi preciso sair do paradigma tradicional de educação e enfrentar a problemática. A experiência e ação entre docentes, discente, graduandos e equipe pedagógica possibilitou uma construção coletiva e produtiva de conhecimento e estratégias pedagógicas.

A partir do relato do colaborador discente e um dos autores deste trabalho é possível afirmar que houve muitas contribuições para o ensino de matemática. Desde o processo

de elaboração e confecção dos materiais até a aplicação, em que o aluno com deficiência visual e as acadêmicas do curso de Licenciatura em Física foram vivenciando novas experiências e desafios; a melhora de desempenho do aluno constatada nas atividades e o desenvolvimento de habilidades como o tato e a audição e, as acadêmicas conhecendo alternativas simples e de custo reduzido que podem ajudá-las a preparar uma aula com recursos didáticos que auxilia e atende todos os alunos, preparando-as também para ensinar pessoas com necessidades especiais.

REFERÊNCIAS

AMORIM, C.; SANTOS, W. D. Trabalhando comprimento da circunferência com deficiente visual. In.: VII CIEM - Congresso Internacional de Ensino da Matemática - ULBRA – Canoas – Rio Grande do Sul – Brasil. 2017.

BAUMEL, R. C. R. C; CASTRO, A. M de. Materiais e Recursos de Ensino para Deficientes Visuais. In: RIBEIRO, M. L; BAUMEL, R. C. Educação Especial: Do querer ao Fazer. São Paulo: Avercamp, 2003, p. 95 – 107.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ - Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf > Acesso em 21/10/2019.

CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em salas de aula. In: SANTOS. F. M. T.; GRECA, I. M. (Orgs). A Pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas Metodologias. Ijuí: Ed. Unijuí, 2006. p. 13-48.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. Registros de representação semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. In.: ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 29 – jan./jun. p. 41-61,2008. Disponível em: < http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/2397/2159 > Acesso em: 10 ago. 2016.

DUVAL, R. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. vol I. Org. Tânia M. M Campos; trad. Marlene A. Dias. São Paulo: PROEM Editora, 2011.

FERRONATO, R. A construção de instrumento de inclusão no ensino da Matemática. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2002.

LIMA, N. J. A aprendizagem significativa em trigonometria sob o ponto de vista de quem ensina e de quem aprende. In.: IV Congresso Internacional de Ensino de Matemática. ULBRA – Canoas – RS. 2013. Disponível em < http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/798/13 > Acesso em 15 jun 2020.

MANTOAN, M. T. E. A integração de pessoas com deficiência: contribuições para uma reflexão sobre o tema. São Paulo: Memnon. Editora SENAC, 1997.

MENDES, I. A. Atividades históricas para o ensino da Trigonometria. In: ______. História da Matemática em Atividades Didáticas. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

OLIVEIRA, F. C. Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades. 2006. 74 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006.

CAPÍTULO 20

CONTRIBUIÇÕES DA TABUADA PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Data de aceite: 17/02/2021

Adriana de Jesus Gabilão
UNIDERP
ORCID 0000-0002-2575-1404

Crys Michelly Vieira de Oliveira Dutra
UNIDERP
ORCID 0000-0001-6622-1381

Renata Forti Braga
UNIDERP
ORCID 0000-0003-4718-0603

RESUMO: Este trabalho tem como objetivo principal analisar a concepção da tabuada apresentada nos cadernos quatro e oito: "Operações e Resolução de Problemas" e "Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber", do programa Pacto Nacional Pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) constituindo uma parte dos estudos preliminares e coleta de dados para uma pesquisa de mestrado. Neste sentido, o estudo irá analisar formas diferenciadas para auxiliar no ensino da tabuada, evidenciando a utilização de materiais concretos para formação de conceitos, bem como o uso de jogos e a diversidade de representações, para aperfeiçoar a compreensão deste conteúdo. No desenvolvimento experimental das atividades em sala, vamos investigar dificuldades e aprendizagens dos alunos com relação às tabuadas, e pensamento algébrico na identificação e uso de propriedades das operações básicas. Dentre os jogos destacamos o jogo com cartas de baralho, sequência de padrões, labirinto dos números e preenchimento individual de cartelas. No que concerne às representações, além do uso da língua portuguesa oral e escrita, serão utilizados materiais concretos, desenhos e símbolos do sistema de numeração decimal.

PALAVRAS - CHAVE: Tabuada. Pensamento Algébrico.Jogos.

ABSTRACT: This work has as main objective to analyze the conception of the tablet presented in notebooks four and eight: "Operations and Problem Solving" and "Mathematical Knowledge and Other Fields of Knowledge", of the Program National Pact for Literacy in the Right Age (PNAIC) constituting a part of preliminary studies and data collection for a master's research. In this sense, the study will analyze different ways to assist in the teaching of the tablet, evidencing the use of concrete materials for the formation of concepts, as well as the use of games and the diversity of representations, to improve the understanding of this content. In the experimental development of classroom activities, we will investigate students' difficulties and learning in relation to taboos, and algebraic thinking in the identification and use of basic operations properties. Among the games we highlight the game with playing cards, sequence of patterns, maze of numbers and individual filling of cards. With regard to representations, in addition to the use of oral and written Portuguese language, concrete materials, drawings and symbols of the decimal numbering system will be used.

KEYWORDS: Table. Algebraic thought. Games.

O caderno 8 do PNAIC (BRASIL, 2014b) traz informações, com as quais concordamos, de que "O ensino da tabuada sempre fez parte do currículo de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Estudos recentes mostram que ela pode ser compreendida sem a 'decoreba', de forma bem mais natural, prazerosa e permanente.

O caderno 4 do PNAIC (BRASIL, 2014a) traz uma sugestão, extraída do livro de Pires (2013), para a construção de Fatos Básicos da Multiplicação. É sugerido que a "Tábua de Pitágoras" seja elaborada coletivamente e de forma gradativa, por meio de diálogo que visa:

> ...problematizar situações para que os alunos percebam regularidades tais como:
>
> • 1 x 3 tem o mesmo resultado de 3 x 1, embora representem situações distintas, (propriedade comutativa);
>
> • quando um dos fatores é "1", o resultado da multiplicação é igual ao outro fator. (elemento neutro);
>
> • o preenchimento da segunda linha e coluna se constitui no dobro dos resultados da primeira linha e coluna. O mesmo acontece com a quarta linha e coluna em relação à segunda e com a oitava linha e coluna em relação à quarta. Outras regularidades são observáveis, tais como as relações entre as tabuadas do 3, 6 e 9 e ao fato de que os resultados da tabuada do 5 terminam em 5 ou 0. (BRASIL, 2014a, p. 55)

Nós concordamos com essa proposição e acreditamos também que ela deva ser apenas uma dentre outras possibilidades de trabalho com a tabuada. Nesse sentido, no processo de construção da tabuada de multiplicação, os alunos podem compreender, por exemplo, porque o resultado de 3 x 4 é 12 e não simplesmente aceitarem um resultado prescrito pelo professor ou impresso no livro ou em um lápis com a tabuada impressa.

Várias são as alternativas metodológicas para se trabalhar o estudo dos fatos fundamentais da multiplicação. No trabalho que vamos desenvolver, nos pautamos em alguns princípios que consideramos fundamentais, para uma aprendizagem das tabuadas, apresentados no caderno 8 do PNAIC (BRASIL, 2014b, p.58-61), os quais apresentamos de forma sucinta a seguir.

> a) contexto - explorar contextos e situações-problema familiares, quando possível com imagens;
>
> b) construção – oportunizar o aluno na construção coletiva sua própria tabela, junto com o professor;
>
> c) representação – associar as imagens aos fatos da multiplicação por disposição retangular;
>
> d) consulta – a tendência é que os alunos deixem de consultar as tabuadas quando já as tiverem memorizado naturalmente;

e) análise – propor perguntas aos alunos que os levem a conhecer melhor as regularidades, relações e propriedades;

f) calculadora – pode contribuir para percepção de regularidades e levar à familiarização e a fixação de fatos da multiplicação.

Nossa experiência em sala de aula e as investigações iniciais nos permitiram algumas conclusões e perspectivas. Observamos que as principais discussões em torno da matemática, apontadas nos cadernos quatro e oito do PNAIC, apontam a necessidade de recorrer a atividades, jogos e situações que favoreçam a criatividade e descobertas na construção da tabuada. Além disso, é esperado que as questões e desafios propostos nesse processo possibilitem que os alunos identifiquem e se familiarizem com as regularidades numéricas e os fatos fundamentais da tabuada.

Diante disso, nossos estudos e análises de pesquisas e experiências, estão embasando a elaboração de jogos e atividades diversificadas, que possibilitem aos alunos aprendizagens prazerosas envolvendo cálculo mental, regularidades numéricas e pensamento algébrico. É esperado que superem dificuldades e ampliem seus conhecimentos sobre a tabuada, operações fundamentais e o gosto por enfrentar desafios matemáticos. É nessa perspectiva que queremos dar continuidade à pesquisa.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Volume 4: Operações na resolução de problemas**. – Brasília: MEC, SEB, 2014a.

BITTAR, M.; FREITAS, J. L. M.; PAIS, L. C. Técnicas e tecnologias no trabalho com as operações aritméticas nos anos iniciais do ensino fundamental. In: Katia Stocco Smole; Cristiano Alberto Muniz. (Org.). **A matemática em sala de aula**. 1ª ed. Porto Alegre: Penso, 2013, v.1, p. 1-23.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Volume 8: Saberes Matemáticos e Outros Campos do Saber**. – Brasília: MEC, SEB, 2014b.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC, 1997.

LOPES, A. J. ; FRANT, J.B. **Nós da Matemática**: soluções para dez desafios do professor. São Paulo: Ática Educadores, 2011.

KAPUT, J. J. BLANTON. M. J. & MORENO, L. **Álgebra de um ponto de vista de simbolização**, In J.J. Kaput, D.W.M. & Carl. Blanton (EDS.), **álgebra nas séries iniciais** (pp. 19-55). Nova Iorque: Lawrence Erlbaum Associados. 2008

PIRES, C. M. **Números naturais e operações**. São Paulo: Melhoramentos, 2013.

CAPÍTULO 21

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE POISSON 2D ANISOTRÓPICA COM *SOLVER* LINHA

Data de aceite: 17/02/2021

Data de submissão: 09/12/2020

Mairon Carliel Pontarolo
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO
Irati –PR
http://lattes.cnpq.br/3015279964475572

Giovanni Santos
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, Irati –PR
http://lattes.cnpq.br/7416106820769519

Sebastião Romero Franco
Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO,
Irati –PR
http://lattes.cnpq.br/4478097702020295

RESUMO: O presente trabalho, designa-se a apresentar o estudo acerca dos métodos numéricos usados para resolver equações diferenciais parciais, que modelam matematicamente muitos problemas encontrados nas engenharias. O modelo matemático utilizado no experimento foi a equação de Poisson bidimensional com anisotropia. O uso desse fator de anisotropia, permitiu simular numericamente a condução do calor em um domínio formado por dois materiais com diferentes condutividades térmicas e com uma fonte de calor externa. O modelo numérico foi obtido mediante o emprego do Método das Diferenças Finitas, com aproximação central de segunda ordem para a discretização. Na solução do sistema de equações resultante, utilizou-se os métodos deGauss-Seidel lexicográfico e Gauss-Seidel por linhas. Os resultados obtidos possibilitaram ponderar que o método de Gauss-Seidel lexicográfico é mais eficiente quando o problema é isotrópico. Caso o problema seja anisotrópico, o método Gauss-Seidel por linha na direção do forte acoplamento apresenta resultados expressivamente melhores, corroborando com resultados descritos na literatura.

PALAVRAS - CHAVE: Condução de Calor, Método das Diferenças Finitas, Gauss-Seidel

NUMERICAL SOLUTION OF THE 2D ANISOTROPIC POISSON EQUATION WITH LINE SOLVER

ABSTRACT: This paper aims to present the study about the numerical methods used to solve partial differential equations, which mathematically model many problems found in engineering The mathematical model used in the experiment was the two-dimensional Poisson equation with anisotropy. The use of this anisotropy factor allowed the numerical simulation of heat conduction in a domain formed by two materials with different thermal conductivities and an external heat source. The numerical model was obtained using the Finite Differences Method, with a second-order central approximation for discretization. In the solution of the resulting system of equations, the lexicographic Gauss-Seidel and line Gauss-Seidel methodswere used. The results obtained made it possible to consider that the lexicographic Gauss-Seidel method is more efficient when the problem is

isotropic. If the problem is anisotropic, the Gauss-Seidel method with line in the direction of strong coupling presents significantly better results, corroboratingresults described in the literature.
KEYWORDS: Heat conduction, Finite Differences Method, Gauss-Seidel.

1 I INTRODUÇÃO

A Equação de Poisson anisotrópica é uma equação diferencial parcial elíptica que se aplica em escoamento de fluidos incompressíveis. Fisicamente, essa equação pode representar a distribuição de calor em um regime permanente. Muitas vezes em problemas bidimensionais ocorre que as condutividades térmicas são diferentes nas direções x e y, devido aos componentes dos materiais. Nesses casosa equação apresenta um fator de anisotropia física.Em geral, essa classe de equações não possui solução analítica conhecida, buscam-se então soluções numéricas. Para esse fim, foi essencial realizar uma ampla abordagem sobre a Dinâmica dos Fluidos Computacional, que trata dos estudos de métodos computacionais para simulação de fenômenos que envolvem fluidos em movimento com ou sem trocas de calor, cujo interesse principal é obter grandezas físicas, como velocidade, temperatura e pressão, na região do escoamento (FORTUNA, 2000).

As simulações numéricas podem resolver problemas com condições de contorno gerais e definidos em praticamente todos os tipos de geometrias. Para isso, transforma-se o domínio contínuo em um domínio discreto através do uso de uma malha. Para aproximar as derivadas, na discretização do modelo matemático, neste trabalho emprega-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) (TANNEHILL et al., 1997; GOLUB; ORTEGA, 1992).

2 I MATERIAIS E MÉTODOS

Seja a equação de Poisson 2D anisotrópica (BRIGGS et al., 2000)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = S\,, \tag{1}$$

em que Té a temperatura, x e y são as coordenadas espaciais e $\varepsilon \in R_+^*$ é o fator de anisotropia. A discretização da equação é feita através de malha uniforme sob o domínio [0,1]×[0,1] com um número de pontos $N = N_x = N_y$, onde N_x e N_y são os números de pontos nas direções coordenadas x e y, respectivamente, incluindo os contornos. O problema de anisotropia física será analisado a partir da equação de difusão bidimensional dado pela Eq. (1) e as seguintes condições de contornos do tipo Dirichlet.

$$T(0,y) = T(x,0) = T(x,1) = T(1,y) = 0\,. \tag{2}$$

O termo fonte S e a solução analítica Ta são

$$S = -\pi^2\, sen(\pi x)\, sen(\pi y)(1+\varepsilon), \quad (3)$$

e

$$Ta(x,y) = sen(\pi x) sen(\pi y)\,. \quad (4)$$

A discretização da Eq. (1) foi realizada adotando-se o Método das Diferenças Finitas (MDF) com aproximações do tipo CDS, resultando em

$$\left(\frac{T_{i-1,j}-2T_{i,j}+T_{i+1,j}}{h^2}\right)+\varepsilon\left(\frac{T_{i,j-1}-2T_{i,j}+T_{i,j+1}}{h^2}\right) = S_{i,j}\,, \quad (5)$$

ou

$$\frac{2}{h^2}(1+\varepsilon)T_{i,j} = \frac{1}{h^2}\left(T_{i-1,j}+T_{i+1,j}\right)+\frac{\varepsilon}{h^2}\left(T_{i,j-1}+T_{i,j+1}\right)-S_{i,j}\,. \quad (6)$$

Após a discretização, tem-se um um sistema linear a ser resolvido. A solução desse sistema linear através de métodos diretos não é recomendável, visto que na prática, a matriz dos coeficientes é grande e esparsa. Para problemas de grande porte os métodos iterativos são mais adequados (BURDEN; FAIRES,2016). Na solução do sistema resultante, usou-se os métodos de Gauss-Seidel lexicográfico (GS_{lex}) e o método de Gauss-Seidel por linhas, (GS_x) para linhas na direção x e (GS_y) para linhas na direção y. Para resolver de forma direta cada linha, usou-se o método TDMA.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para o problema apresentado, o programa computacional foi executado com diferentes valores de Ɛ com o intuito de analisar o desempenho dos métodos (*solvers*).Os resultados dos erros numéricos $(\|Erro\|_\infty)$,número de iterações (itr),fator de convergência (ρ)e tempo computacional (t_{CPU})são apresentados na Tab.1.

ε	$Solver$	itr	$\|Erro\|_\infty$	ρ	$t_{\{CPU\}}(s)$
10^0	GS_{lex}	5354	$1,63E-05$	$0,997$	$1,034$
	GS_x	2679	$1,63E-05$	$0,995$	$16,22$
	GS_y	2679	$1,63E-05$	$0,995$	$16,74$
10^{-5}	GS_{lex}	5259	$1,94E-05$	$0,997$	$1,163$
	GS_x	3	$1,54E-05$	$4,25E-03$	$0,030$
	GS_y	5259	$1,94E-05$	$0,997$	$32,97$
10^5	GS_{lex}	5259	$1,93E-05$	$0,997$	$1,019$
	GS_x	5259	$1,94E-05$	$0,997$	$32,37$
	GS_y	3	$1,54E-05$	$4,25E-03$	$0,023$

Tabela 1–Resultados das simulações numéricas com Nx = Ny = 65.

Com esses resultados, identifica-se que o método de GS_{lex} se mostrou mais eficiente para o problema isotrópico, ou seja, o modelo é obtido com materiais de mesma condutividade térmica. Para problemas anisotrópicos, o Gauss-Seidel por linha na direção em que a condutividade térmica é maior, demonstrou melhor desempenho. Os resultados encontrados estão em concordância aos descritos por Thole e Trottenberg(1986) e Franco et al.(2018).

A eficiência do *solver* Gauss-Seidel linha aplicado na direção do forte acoplamento pode ser também constatado em malhas mais refinadas, como mostrado na Tab.2. Nesta tabela, os resultados foram obtidos usando o solver GS_y, com fator de anisotropia $\varepsilon = 10^5$ e o critério de parada baseado no resíduo adimensionalizado $(res(itr)/res(itr-1))$, com tolerância $tol = 10^{-8}$.

N	129	257	513	1025	2049
itr	3	4	6	11	27
$t_{CPU}\ (s)$	$0,015$	$0,164$	$1,989$	$34,99$	$947,606$

Tabela 2–Resultados considerando $\varepsilon = 10^5$, *Solver* GSy e $tol = 10^{-8}$

Com esses resultados, percebe-se que o *solver* linha apresenta um bom desempenho quando aplicado à problemas anisotrópicos, pois ainda que a malha seja refinada e consequentemente o sistema linear seja de grande porte, foi possível resolver com poucas iterações, mesmo sem o uso de técnicas que aceleram a convergência.

4 | CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse estudo permitiu explorar uma importante área da matemática aplicada, no qual foi constatado a influência de se aplicar o solver adequado para melhorar o fator de convergência e o tempo computacional nas simulações numéricas, quando se trata de fenômenos físicos modelados pela equação de Poisson. Verificou-se que com o método de Gauss-Seidel lexicográfico, o fator de convergência tende a unidade quando a malha é refinada, aumentando excessivamente o número deiterações para se conseguir a tolerância desejada. Porém, se o problema é anisotrópico, o uso de solvers linha, na direção em que a taxa de transferência de calor é maior, pode atenuar esse problema, pois mesmo em malhas refinadas, o número de iterações para resolver o sistema linear, não se eleva drasticamente.

REFERÊNCIAS

BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. A *Multigrid Tutorial*. 2nd. ed.Philadelphia: SIAM, 2000.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 10nd. ed. Boston: Cengage Learning, 2016.

FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: conceitos básicos e aplicações*. 2nd. ed. São Paulo: Edusp, 2000.

FRANCO, S. R.; GASPAR, F. J.; PINTO, M. A. V.; RODRIGO, C. Multigrid method based on a space-time approach with standard coarsening for parabolic problems. *Applied Mathematics and Computation,* v. 317, p. 25–34, 2018.

GOLUB, G. H.; ORTEGA, J. M. *Scientific Computing and Differential Equations: an Introduction to Numerical Methods*. Academic Press, 1992.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer.* Philadelphia: Taylor & Francis, 1997.

THOLE, C.; TROTTENBERG, U. Basic smoothing procedures for the multigrid treatment of elliptic 3d operators. *Appl. Math. Comput.*, v. 333, n. 19, 1986.

CAPÍTULO 22

O ENSINO DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DO USO DOS JOGOS DIGITAIS

Data de aceite: 17/02/2021

Vilma Luísa Siegloch Barros
Instituto Federal do Acre – IFAC.
Grupo de Pesquisa FORPROCIM – Formação de Professores que ensinam Ciências e Matemática Rio Branco Acre
http://lattes.cnpq.br/9336804685161682

RESUMO: Este é um relato de experiência que surgiu após a aplicação de um minicurso realizado durante a VI Semana da Matemática na Universidade Federal do Acre - UFAC, tendo como objetivo, relacionar a importância da utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC com a formação inicial de professores de matemática. O objetivo desse minicurso, foi ampliar os olhares dos futuros docentes quanto a importância da inserção das tecnologias nas aulas de matemática, utilizando materiais prontos disponíveis de forma gratuita na internet, neste caso, os jogos digitais. Foram desenvolvidas atividades utilizando vários Jogos Digitais, onde cada participante recebeu instruções de como proceder em relação a escolha do melhor material para suprir as necessidades específicas de suas turmas, assim como, puderam planejar uma aula e executá-la entre os colegas, colocando em prática o que estavam aprendendo no minicurso. Buscamos desenvolver o raciocínio lógico e a concentração dos alunos envolvidos nas atividades, sendo eles originários dos cursos de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Acre – Campus Rio Branco e da Universidade Federal do Acre – UFAC, Campus Rio Branco, visando a atuação dos mesmos posteriormente nas escolas da Educação Básica, onde atuarão como futuros docentes. Como estratégia de ensino, procuramos incentivar a participação de todos no decorrer das atividades propostas, onde foi possível observar as dificuldades encontradas no decorrer do percurso com as atividades, proporcionando reflexão sobre as diversas possibilidades de exploração das TIC na Educação Básica. Como resultado, procuramos contribuir com a formação de futuros professores de matemática que atuarão na Educação Básica, através da participação dos alunos dos cursos de licenciatura, enfatizando a importância do uso das tecnologias no desenvolvimento das aulas.

PALAVRAS - CHAVE: Tecnologias da Informação e Comunicação - TIC. Jogos Digitais. Formação de Professores.

THE TEACHING OF MATHEMATICS THROUGH THE USE OF DIGITAL GAMES

ABSTRACT: This is an experience report that emerged after the application of a short course held during the 6th Week of Mathematics at the Federal University of Acre - UFAC, aiming to relate the importance of using Information and Communication Technologies - ICT with the initial training of math teachers. The objective of this mini-course was to broaden the views of future teachers regarding the importance of inserting technologies in mathematics classes, using ready-made materials available free of charge on the internet, in this case, digital games. Activities

were developed using several Digital Games, where each participant received instructions on how to proceed in choosing the best material to meet the specific needs of their classes, as well as being able to plan a class and execute it among colleagues, putting into practice what they were learning in the mini course. We seek to develop the logical reasoning and concentration of the students involved in the activities, being them from the Mathematics Degree courses at the Federal Institute of Acre - Campus Rio Branco and the Federal University of Acre - UFAC, Campus Rio Branco, aiming at their performance later in Basic Education schools, where they will act as future teachers. As a teaching strategy, we seek to encourage the participation of everyone in the course of the proposed activities, where it was possible to observe the difficulties encountered along the way with the activities, providing reflection on the various possibilities for exploring ICT in Basic Education. As a result, we seek to contribute to the training of future mathematics teachers who will work in Basic Education, through the participation of students in undergraduate courses, emphasizing the importance of using technologies in the development of classes.
KEYWORDS: Information and Communication Technologies - ICT. Digital games. Teacher training.

1 | INTRODUÇÃO

Este relato de experiência surgiu após a aplicação de um minicurso realizado na Universidade Federal do Acre – UFAC, durante a VI Semana da Matemática, no ano de 2018. A ideia de trabalhar a temática “Jogos Digitais para a Educação Básica”, se deu em razão de atividades realizadas com o objetivo de inserir e incentivar o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC, no ambiente escolar, mais precisamente na Educação Básica, em aulas de matemática.

As atividades que originaram o trabalho com os jogos digitais, foram desenvolvidos ao longo da graduação em Matemática e posteriormente no Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática – MPECIM, ambos na Universidade Federal do Acre, onde diversas atividades puderam sair do mundo das ideias e ser colocadas em prática através das aulas trabalhadas.

Ao longo do percurso envolvendo o desenvolvimento das atividades com as TIC, foi possível perceber a necessidade formativa por parte de muitos professores que atuam na Educação Básica, tendo como pressuposto a análise da Estrutura Curricular dos Cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Acre e Instituto Federal do Acre, para possível discussão em relação à alguma lacuna que pudesse existir em sua composição, visando a formação inicial desses professores e a utilização das TIC como ferramenta facilitadora do processo de ensino e aprendizagem.

Segundo Chiapinni,

> Verifica-se que a formação do professor é fator imprescindível para que a escola consiga melhorar a capacidade do cidadão comunicante, uma vez que o professor pode adotar em sua prática cotidiana uma postura que subsidia

> e estimula o aluno a refletir sobre o que significa comunicar-se em nossa sociedade, como também aprender a manipular tecnicamente as linguagens e a tecnologia. (CHIAPINNI, 2005, p. 278)

Com o objetivo de contribuir com a inserção e expansão do uso das TIC em aulas de matemática na Educação Básica, através da formação docente, buscamos envolver os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Acre e do Instituto Federal do Acre, desenvolvendo atividades durante o minicurso ofertado.

Como metodologia, adotamos uma abordagem qualitativa, visando contribuir com um professor que possa refletir sobre suas práticas, pensando nas necessidades formativas do alunado envolvido, buscando ligação com a atual conjuntura envolvendo as TIC no cotidiano das pessoas, assim como, mostrando que a matemática está presente nas diversas atividades vividas por nós, seja na vida profissional, seja no aconchego de nossos lares.

Buscar fazer essa relação é de extrema importância para que os alunos possam compreender a relação existente entre a matemática estudada na escola e a suas aplicações práticas no dia-a-dia. Nesta perspectiva, trabalhar matemática com o auxílio dos jogos digitais, parece ser algo positivo para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

Os jogos digitais caracterizam-se por apresentar-se de forma bastante atrativa para os alunos, tendo em vista o gosto pelos *vídeo games* que a maioria dos alunos da Educação Básica apresentam. Destacamos também as cores, os sons e as estratégias de raciocínio que a maioria dos jogos apresentam, como sendo algo que chama bastante a atenção dos alunos.

No entanto, é necessário que haja formação docente com o foco no uso das TIC como ferramenta capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, onde os futuros professores poderão analisar os prós e os contras apresentados pelo uso dos jogos digitais.

O uso de jogos, assim como outros recursos utilizados em aulas de matemática, deve servir de apoio para que os alunos possam aprofundar e ampliar os seus conhecimentos em relação ao assunto estudado. É necessário que esse processo provoque reflexões sobre os assuntos propostos para aquela atividade, mostrando ligação, desenvolvimento e resultados.

Também são importantes que sejam observados os objetivos das atividades envolvendo o uso de jogos, de maneira que os alunos possam discutir as ideias e as descobertas feitas com a aplicação dos mesmos, sejam eles digitais ou não.

É necessário estipular um tempo para a realização das atividades, para que ao final se consiga registrar e discutir os resultados. Pode-se utilizar um mesmo jogo em momentos diferentes, frisando o desenvolvimento de novas ideias e aprofundando as já registradas sobre uma temática.

Os jogos digitais podem oferecer alguns benefícios ao processo de ensino e

aprendizagem, tais como:

- Efeito motivador;
- Facilitador do aprendizado;
- Desenvolvimento de habilidades cognitivas;
- Aprendizado por descoberta;
- Experiência de novas identidades;
- Socialização;
- Coordenação motora e,
- Comportamento *expert.*

Divertir e entreter os envolvidos, ao mesmo tempo em que incentivam o aprendizado por meio de ambientes interativos e dinâmicos. De acordo com Balasubramanian; Wilson, 2006, podemos ver que os jogos digitais provocam o interesse e motivam estudantes com desafios, curiosidade, interação e fantasia.

Como facilitador do aprendizado, os jogos digitais apresentam-se como forte aliado do ensino, podendo auxiliar o processo de ensino e aprendizagem, seja através do caráter dinâmico que as tecnologias digitais trazem para o ambiente escolar, seja pela conexão que existe entre o manipular tecnológico das gerações atuais.

Segundo Mitchell; Savill-Smith,

> Os jogos colocam o aluno no papel de tomador de decisão e o expõe a níveis crescentes de desafios para possibilitar uma aprendizagem através da tentativa e erro. (MITCHELL; SAVILL-SMITH)

Os jogos digitais proporcionam a elaboração de estratégias pelo jogador, lhe possibilitando compreender como cada elemento que compõem o jogo se apresenta e se comporta diante de cada jogada, podendo promovendo o desenvolvimento intelectual e cognitivo dos envolvidos, através da resolução de problemas, desenvolvimento do pensamento crítico, reconhecimento de padrões e criatividade.

Através dos jogos digitais, os alunos demonstram ter estimuladas as capacidades de explorar ambientes virtuais diversos e a criatividade, fazendo com que possam experimentar situações que podem simular a realidade de muitas profissões, ocasionando a aprendizagem por descoberta. Dessa forma, o aluno experimenta novas identidades, através da imersão em situações que abrangem várias profissões, dando-lhes a oportunidade de aprender competências relacionadas à determinadas áreas, assim como, obter conhecimentos que envolvem as identidades dos personagens de caga jogo.

Dessa forma, dizemos que os estudantes ao terem contato com um jogo que aborde a vida profissional de um piloto de avião, por exemplo, acaba por enfrentar problemas

e dilemas vivenciados pelos profissionais de tal área. O comportamento *expert* em determinados assuntos abordados através dos jogos digitais, também pode ser uma característica de estudantes que utilizam os jogos.

Segundo Balasubramanian; Wilson,

> Apesar do potencial e benefícios, os jogos digitais educacionais ainda são pouco empregados e, para muitos professores, encontrar e utilizar bons jogos continuam sendo um desafio. (BALASUBRAMANIAN; WILSON, 2006)

E, foi nessa perspectiva, de que ainda temos muitos desafios nessa caminhada envolvendo o uso dos jogos digitais e o processo de ensino e aprendizagem no ensino de matemática, que desenvolveu-se o minicurso.

Para tal, utilizou-se o Laboratório de Informática da Universidade Federal do Acre, onde trabalhou-se primeiramente os conceitos de epistemologia e sua ligação com a construção do conhecimento matemático.

Como afirma Micotti:

> [...] A renovação do ensino não consiste, apenas, em mudança de atitude do professor diante do saber científico, mas, ainda e especialmente, diante do conhecimento do aluno: é preciso compreender como ele compreende, constrói e organiza o conhecimento. (MICOTTI ,1999, p. 164).

Vendo a importância de compreender como nosso aluno compreende, abordamos conceitos ligados às tendências Metodológicas na Educação Matemática, onde foi possível debater sobre Etnomatemática, Modelagem, Resolução de Problemas, História da Matemática, Jogos e Tecnologias da Informação e Comunicação.

Achou-se importante trazer abordagens de forma geral sobre as temáticas acimas mencionadas, de forma à situar nossos alunos sobre a temática do minicurso. Ao se tratar de alunos dos Cursos de Licenciatura em matemática, foi possível promover reflexão e troca de ideias sobre a importância da diversificação das metodologias de ensino, mostrando o papel de cada uma no contexto da sala de aula.

Após as discussões feitas sobre as metodologias de ensino, foram analisados alguns *sites* que proporcionam o uso de jogos digitais envolvendo vários conteúdos matemáticos, de forma a mostrar uma visão ampla sobre o quantitativo de opções existentes no mercado, assim como, mostrando aos futuros docentes, a importância de

se traçar estratégias de ensino, onde os objetivos da aula necessitam estar bem definidos e claros.

Os *sites* analisados foram:

- www.portaldoprofessor.mec.gov.br
- www.somatematica.com.br
- www.sofisica.com.br

- www.rachacuca.com.br

É importante ressaltar que, os alunos tiveram a oportunidade de acessar os *sites* acima citados, explorando os jogos digitais disponíveis, analisando os conteúdos que cada um abordava, fazendo uma listagem dos pontos observados. Em seguida, foram levantadas discussões envolvendo os *sites*, afim de promover reflexões para um futuro processo de escolha do melhor *site* ou jogo, para cada situação diagnosticada pelo futuro professor.

Cada participante pôde elaborar um plano de aulas, onde foi abordado um assunto de matemática para ser trabalhado através do uso de jogos digitais. Os objetivos de cada aula foi traçado com cautela, de forma a deixar bem claro o que se pretendia ensinar através do uso dos jogos, de forma que a aula não focasse no jogo pelo jogo.

Após a finalização da construção dos planos de aula, cada aluno teve a oportunidade de demonstrar como seria a sua aula, de forma que todos os participantes pudessem trocar ideias sobre as diversas formas de ensinar matemática utilizando os jogos digitais e as tecnologias de forma geral.

Essa demonstração foi feita com a utilização de *data-show*, dando mais dinamismo para a participação da turma inteira, facilitando a visualização das atividades, assim como, colaborando para as anotações feitas por cada participante, para posterior discussão dos resultados obtidos.

2 I CONSIDERAÇÕES FINAIS

Reconhecer alguns detalhes que poderiam ser mudados e/ou melhorados nas aulas, foi o ponto crucial do minicurso, tendo em vista a importância das observações e reflexões feitas pelos futuros docentes, com o objetivo de tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e produtivas.

Os apontamentos feitos pelos participantes do minicurso, seguiram um padrão de ideias focadas na caracterização da sala de aula conhecida por eles, onde a matemática é apresentada aos alunos de forma tradicional, através da utilização quase que exclusiva do uso do livro didático e da lousa para a exposição das aulas.

Esta reflexão foi considerada necessária e importante para a ocasião, de forma que os participantes pudessem fazer comparações entre os formatos de aulas de matemática recebidas por eles quando cursaram a Educação Básica e, as aulas de matemática com a utilização dos jogos digitais propostas no minicurso.

Em contrapartida, também foi discutido o perfil dos estudantes da atualidade, os chamados nativos digitais, que segundo Prensky (2001, p. 15), “são alunos que já nascem neste mundo digital e de imigrantes digitais os que nascem na geração anterior, os quais precisam de adaptação ao novo momento”.

Diante das reflexões feitas, percebeu-se que o uso dos jogos digitais em aulas de matemática voltadas para a Educação Básica, pode ser um grande aliado do processo de

ensino e aprendizagem, contribuindo significativamente com o envolvimento dos alunos atuais no desenvolvimento das atividades propostas pelo professor, pois esses alunos que cursam a Educação Básica hoje, já nasceram neste mundo conectado.

Também foi apontada, a importância desse tipo de prática nos Cursos de Licenciatura em Matemática, mostrando aos futuros docentes as necessidades formativas para o profissional da atualidade, onde as TIC mostram-se fazer parte do cotidiano de todos.

Dessa forma, vemos que a escola necessita estar inserida nesse novo contexto, que é caracterizado pela realidade do uso das tecnologias no dia a dia de todos. Fazer parte desta nova era, a era digital, é mostrar que a escola não se tornou obsoleta diante do novo, mas que é responsável por promover o crescimento e o desenvolvimento de ideias que originam a evolução através dos tempos, com o foco no bem estar de uma sociedade mais justa e igualitária.

REFERÊNCIAS

BALASUBRAMANIAN, Nathan; WILSON, **Brent G. Games and Simulations**. In:Society for Information Technology and Teacher Education International conference, 2006.**Proceedings…**v.1.2006. Disponívelem:<http://site.aace.org/pubs/foresite/GamesAndSimulations1.pdf>. Acesso em: 27 de novembro de 2017.

BEZERRA, S. M. C. B.; BANDEIRA, S. M. C. **As mudanças no ensino da matemática com a utilização do laptop educacional na escola estadual de ensino fundamental Santo Izidoro, no Estado do Acre**. In: V Simpósio Linguagens e Identidades da/na Amazônia Sul-Ocidental, 2011, Rio Branco. Anais. Rio Branco: Edufac,2011.p. 765-766.

BANDEIRA, Salete M. Chalub; BEZERRA, Simone M. Chalub Bandeira; BARROS,Vilma L.S.; **Práticas Interdisciplinares com o Laptop UCA: partindo da alfabetização digital**. XI Encontro Nacional de Educação Matemática – XI ENEM. SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. PUCPR, Curitiba PR, 2013.

BANDEIRA, Salete M. Chalub; BEZERRA, Simone M. Chalub Bandeira; BARROS,Vilma L.S.; **As TICs integradas à prática pedagógica do professor de Matemática: uma realidade possível.** IV Seminário Nacional de Histórias e Investigações de/em Aulas de Matemática. UNICAMP – SP, 2013.

BANDEIRA, Salete M. Chalub; BEZERRA, Simone M. Chalub Bandeira;

BARROS,Vilma L.S.; **Os Saberes e as Necessidades Formativas do Professor do século XXI: As TICs integradas a prática pedagógica do professor.**– XI ENEM. SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática. PUCPR, Curitiba PR, 2013.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática.** 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BOVO, A. A. **Formação de professores de matemática para o uso da informática na escola: tensões entre proposta e implementação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/ SEF. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

CHIAPINNI, L**. A reinvenção da catedral.** São Paulo: Cortez, 2005. 278p.

D'AMBRÓSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 16. ed. Campinas: Papirus, 2008a.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **O profissional em Educação Matemática**, 2006. Disponívelem:<http://www.unisanta.br/teiadosaber/apostila/matematica/O_profissional_em _Educacao_ Matematica-Erica2108.pdf.>. Acesso em: 28 de outubro de 2017.

GARCIA, T. M. R. **Internet e Formação de Professores de Matemática**: desafios e possibilidades. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

GHEDIN, E. Professor Reflexivo: da alienação da técnica à autonomia da crítica. In: PIMENTA, S. G.; GHEDIN. E. (Org.). **Professor Reflexivo no Brasil:** gênese e crítica de um conceito. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2010.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. **O ensino e as propostas pedagógicas**. Ln: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999.

MITCHELL, Alice; SAVILL-SMITH, Carol. **The use of computer and video games for learning: A review of the literature**. Londres: Learning and Skills Development Agency (LSDA), 2004.

PRENSKY, Marc. **Nativos Digitais**. São Paulo: Phorte, 2010. 320 p.

VALENTE, J. A. (Org.). **Computadores e conhecimento**: repensando a educação. Campinas: NIED/ UNICAMP, 1993a, p. 24-44.

VALENTE, J. A. Análise dos diferentes tipos de softwares usados na Educação. In: **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: UNICAMP/Nied, 1999.

CAPÍTULO 23

ESTUDO DE DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS EM SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO: DINÂMICA DOS SISTEMAS DE LORENZ E RÖSSLER

Data de aceite: 17/02/2021
Data de submissão: 04/01/2021

Henry Otavio Fontana
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Departamento de Matemática (DAMAT)
Ponta Grossa – Paraná
http://lattes.cnpq.br/8945930589873958

Thiago Gilberto do Prado
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Departamento de Matemática (DAMAT)
Ponta Grossa – Paraná
http://lattes.cnpq.br/8579825163457253

Vinícius Piccirillo
Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Departamento de Matemática (DAMAT)
Ponta Grossa – Paraná
http://lattes.cnpq.br/3854173197129961

RESUMO: A não linearidade é responsável pelo surgimento dos comportamentos complexos e imprevisíveis nos sistemas dinâmicos. Um dos comportamentos complexos mais surpreendentes que se encontra dentro dos estudos da dinâmica não linear é o caos, o qual está relacionado com a alta imprevisibilidade observada em certas dinâmicas oscilatórias. Assim o objetivo desta pesquisa é predizer como sistemas dinâmicos evoluem com o progresso do tempo e quais comportamentos eles podem apresentar para determinadas condições. No estudo realizado, escolhemos os sistemas de Lorenz e Rösller tridimensional para realizar esta exploração. Os resultados numéricos obtidos a partir das simulações realizadas possibilitaram uma análise geral dos fenômenos dinâmicos encontrados. Ao longo do trabalho é mostrado quando ocorrem as transições entre os comportamentos dinâmicos destes sistemas, à medida que determinado parâmetro de controle é variado. Os comportamentos dinâmicos, tanto periódicos quanto caóticos, encontrados foram estudados e caracterizados através da evolução temporal, espaço de fases, diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov.

PALAVRAS - CHAVE: Dinâmica não linear. Caos. Expoente de Lyapunov.

STUDY OF NONLINEAR DYNAMICS AND CHAOS IN CONTINUOUS TIME SYSTEMS: DYNAMICS OF LORENZ AND RÖSSLER SYSTEMS

ABSTRACT: Nonlinearity is responsible for the appearance of complex and unpredictable behaviors in dynamic systems. One of the most surprising complex behaviors found in studies of nonlinear dynamics is chaos, which is related to the high unpredictability observed in certain oscillatory dynamics. So the objective of this research is to predict how dynamic systems evolve with the progress of time and what behaviors they can exhibit under certain conditions. In the study carried out, we chose the Lorenz and three-dimensional Rössler systems to carry out this exploration. The numerical results obtained

from the simulations performed enabled a general analysis of the dynamic phenomena found. Throughout the work it is shown when the transitions between the dynamic behaviors of these systems occur, as a given control parameter is varied. The dynamic behaviors, both periodic and chaotic, found were studied and characterized through the temporal evolution, phase space, bifurcation diagrams and Lyapunov exponents.
KEYWORDS: Nonlinear dynamics. Chaos. Lyapunov Exponents.

1 I INTRODUÇÃO

Para uma certa extensão, os estados futuro e passado de muitos sistemas dinâmicos podem ser previstos conhecendo seu estado presente e as leis que regem sua evolução e comportamento. Uma vez que estas leis não mudam no tempo, o comportamento de tal sistema pode ser considerado como completamente definido pelo seu estado inicial. Assim, pode-se definir um sistema dinâmico como sendo um conjunto de possíveis estados, os quais estão associados por uma lei de evolução do sistema com o tempo (THORTON, S,T.; MARION, J.B;, 2004).

Em diversos casos, a não linearidade é a responsável pelo surgimento dos comportamentos complexos e imprevisíveis nos sistemas dinâmicos. Um dos comportamentos complexos mais interessantes que se encontra dentro dos estudos de dinâmica não linear é o caos.

O caos é um comportamento relacionado com a alta imprevisibilidade observada em certas dinâmicas oscilatórias (HOFF, 2014). Caos está associado a sistemas dinâmicos que são extremamente sensíveis a mudanças nas condições iniciais; ou seja, uma pequena mudança em uma condição inicial pode modificar a dinâmica futura, sendo que o resultado obtido se encontra totalmente distante do previsto inicialmente. (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

Os parâmetros de sistemas dinâmicos determinísticos desempenham uma importante função especificando, por exemplo, as transições entre o comportamento caótico e periódico. Esta influência dos parâmetros na transição do atrator pode ser analisada e representada em diagramas de bifurcação e também no espaço de parâmetros (WIGGINS, 2003). O expoente de Lyapunov caracteriza os diferentes comportamentos que o sistema pode apresentar (equilíbrio, ciclo limite, caos) (WOLF et.al, 1985). A combinação de diferentes técnicas fornece uma visão da evolução do sistema em termos dos parâmetros e das diferentes rotas para o caos.

Neste artigo iremos estudar a dinâmica de dois problemas dinâmicos já bem conhecidos, onde ambos possuem três equações diferenciais ordinárias não lineares de primeira ordem e autônomas, o primeiro deles é o sistema de Lorenz e o segundo problema estudado é o sistema de Rössler.

2 | MATERIAIS E MÉTODOS

Sistemas dinâmicos multidimensionais revelam uma grande dificuldade para a obtenção de resultados analíticos que possam identificar possíveis comportamentos e a evolução de tal sistema no tempo. Assim, nestes casos, utilizam-se métodos numéricos e ferramentas computacionais para a análise destes sistemas.

Para a investigação dos modelos foi realizado a integração numérica das equações diferencias e através de um algoritmo adequado foram obtidos expoentes de Lyapunov e características dimensionais e espectrais dos modelos de Lorenz e Rössler. A pesquisa possui natureza exploratória com finalidade de analisar a existência dos mais variados comportamentos que esses sistemas apresentam, bem como a condição de regime caótico, partindo de uma revisão bibliográfica composta por autores da área.

Partindo dos conceitos apresentados por esses autores, foi feito uso do software MATLAB® de alta performance voltado para o cálculo numérico (YANG, W.Y. et al., 2005), para obter novos resultados e portanto, comparar com os resultados já presentes na literatura. Inicialmente foi simulado a evolução temporal do sistema com o tempo em um determinado intervalo utilizando a rotina ode45, e assim, construímos o espaço de fases, em seguida diagramas de bifurcação e os expoentes de Lyapunov, onde os gráficos foram feitos com 1000 valores do parâmetro de controle. Além disso, para os dois sistemas foi construído o espaço de parâmetros utilizando uma malha de 800 x 800. Portanto, a partir dos resultados obtidos a partir desses gráficos, iremos fazer uma discussão acerca da dinâmica dos modelos de Lorenz e Rössler.

Uma das principais ferramentas utilizadas para analisar a dinâmica de soluções em equações diferenciais é o Mapa de Poincaré, o qual pode ser interpretado como um sistema dinâmico discreto com um espaço de estado que é uma dimensão menor que o sistema dinâmico contínuo original (SEYDEL,2010).

Com base nos mapas de Poincaré construímos os diagramas de bifurcação. O termo bifurcação é utilizado para descrever mudanças qualitativas que ocorrem num sistema dinâmico, quando perturbações nos parâmetros, dos quais o sistema é dependente, alteram a estrutura das soluções estacionárias e periódicas (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996). Assim, com os diagramas de bifurcação, analisamos como a natureza qualitativa das soluções das equações dependem dos parâmetros do sistema (WIGGINS, 2003). À medida que varia-se um parâmetro no sistema, estas mudanças ocorrem em um número limitado de caminhos prescritos, ou seja, as mudanças que ocorrem no sistema quando varia-se determinado parâmetro não ocorrem aleatoriamente e existe uma ordem para os possíveis tipos de bifurcações, formação e aniquilação de equilíbrios que o sistema apresentará (SEYDEL, 2010).

Caracterizamos o comportamento de trajetórias no espaço de fase de um sistema dinâmico com o uso dos expoentes característicos de Lyapunov (ALLIGOOD; SAUER;

YORKE, 1996). Estamos interessados em compreender como surgem as trajetórias caóticas, para isso utilizaremos métodos já conhecidos na literatura. O que de fato interessa é observar o comportamento das trajetórias, que começam inicialmente muito próximas e que rapidamente se afastam uma da outra divergindo exponencialmente, e isto ocorre pela dependência nas condições iniciais, ou seja, se a condição inicial for levemente perturbada por uma distância infinitesimal, queremos determinar a evolução desta perturbação, se ela será amplificada ou atenuada pela dinâmica do sistema (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

Em um sistema dinâmico dissipativo contínuo tridimensional, os únicos Expoentes de Lyapunov possíveis e os atratores que eles descrevem são: (+, 0, -), um atrator estranho; (0,0, -), torus bidimensional; (0, -, -), um ciclo limite; e (-, -, -), um ponto fixo (WOLF et.al, 1985).

Fizemos uso da abordagem clássica utilizando o mapa tangente para a computação numérica dos expoentes de Lyapunov. O procedimento clássico de estimativa destes expoentes a partir das equações de estado consiste na construção de um espaço tangente subjacente à dinâmica, o que permite avaliar a evolução da magnitude de uma perturbação inicialmente infinitesimal (WOLF et.al, 1985)(GALDINO, 2018).

Também exploraremos a dependência dos sistemas dinâmicos em relação aos parâmetros em diagramas bidimensionais, chamados espaço de parâmetros. Nestes diagramas, consideramos uma grade bidimensional de parâmetros de controle igualmente espaçados (800 x 800). Para cada elemento na grade avalia-se a dinâmica através do maior expoente de Lyapunov. Graficamente um gradiente de cores é criado para representar o valor do maior expoente de Lyapunov com relação ao par de parâmetros escolhidos (HOFF, 2014). Assim é possível verificar onde o sistema apresenta regiões periódicas e caóticas.

3 I RESULTADOS E DISCUSSÃO

O modelo de Lorenz é altamente idealizado de convecções de um fluido, configurando uma corrente no sentido horário ou anti-horário. O número de Prandtl (σ), o número de Rayleigh r e b são parâmetros do sistema. A variável x é proporcional à velocidade do fluxo do fluido circulatório. Se $x > 0$, o fluido circula no sentido horário enquanto $x < 0$ significa que o fluxo ocorre no sentido anti-horário. A largura dos rolos de fluxo é proporcional ao parâmetro b. A variável y é proporcional à diferença de temperatura entre os elementos fluidos ascendente e fluidos descendente e z é proporcional à distorção do perfil vertical da temperatura em relação ao seu equilíbrio (ALLIGOOD; SAUER; YORKE, 1996).

O sistema simplificado de Lorenz é constituído de três equações diferenciais não lineares:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} = xy - bz \end{cases} \qquad (2)$$

Para nossa análise inicial tomamos r como o parâmetro variável, enquanto σ e b permanecerão constantes.

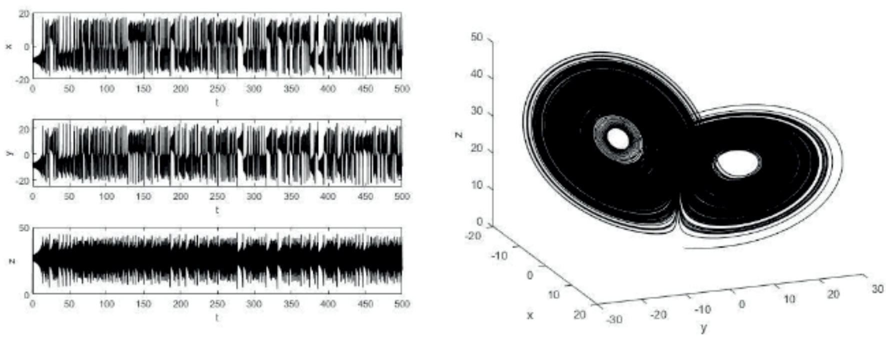


Figura 1. Trajetória do sistema de Lorenz desenvolvida para $b = 8/3$, $\sigma = 10$ e $r = 28$.

Para r = 28, o atrator observado numericamente na figura 1 é caótico. Esta figura mostra a órbita para a condição inicial $(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$. É notável que para essa condição dos parâmetros os três equilíbrios são instáveis e a trajetória desenvolvida encontra-se aprisionada em um volume no espaço de fases definido pelo atrator.

Para valores muito maiores de r existem órbitas periódicas estáveis e o atrator caótico desaparece. Esta variedade de comportamentos pode ser visualizada e predita pelo diagrama de bifurcação.

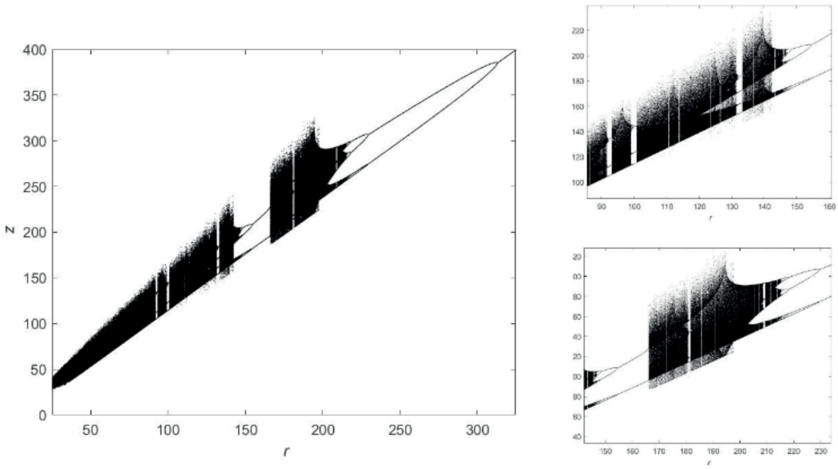


Figura 3. Diagrama de Bifurcação para o sistema Lorenz para $25 \leq r \leq 325$

A visualização dos atratores por meio dos máximos locais definidos pela variável z quando o sistema é resolvido permite construir um diagrama de bifurcação do sistema de Lorenz à medida que variamos o parâmetro de controle. Isso equivale a construirmos os mapas de retorno dos valores máximos da variável z para cada parâmetro. Conforme variamos r é visível a presença de atratores periódicos. À medida que diminui-se o parâmetro a partir de r = 325 percebe-se a ocorrência de uma bifurcação de duplicação de período resultando em um atrator de loop duplo em r = 313,5, ou seja, com dois máximos locais até repetir a órbita. Diminuindo-se ainda mais o valor do parâmetro observa-se uma outra duplicação de período do atrator originando um atrator de loop quádruplo em r = 306,7.

Os múltiplos processos de duplicação de período implicam na presença de uma rota para o Caos via duplicação de período, o qual é visível no diagrama de bifurcação pela região densa de pontos indicando que o sistema apresenta vários valores de máximos locais.

Além da dinâmica caótica do sistema, vários novos efeitos interessantes emergem a partir do diagrama de bifurcação: a saber, as janelas periódicas. As regiões de janelas periódicas são caracterizadas pela presença de regiões periódicas entre regiões caóticas. Esse fenômeno pode ser observado diminuindo ainda mais o valor do parâmetro de controle como no intervalo $194{,}7 \leq r \leq 227{,}7$.

Também verifica-se o fenômeno chamado crise no diagrama de bifurcação, onde o comportamento caótico desaparece ou surge de forma abrupta, apenas com uma pequena variação no parâmetro.

Os valores dos expoentes de Lyapunov foram calculados numericamente com o intuito de se obter os mesmos intervalos caóticos encontrados nos diagramas de bifurcação. Os gráficos condizentes aos expoentes de Lyapunov foram gerados na mesma

faixa paramétrica que o diagrama de bifurcação.

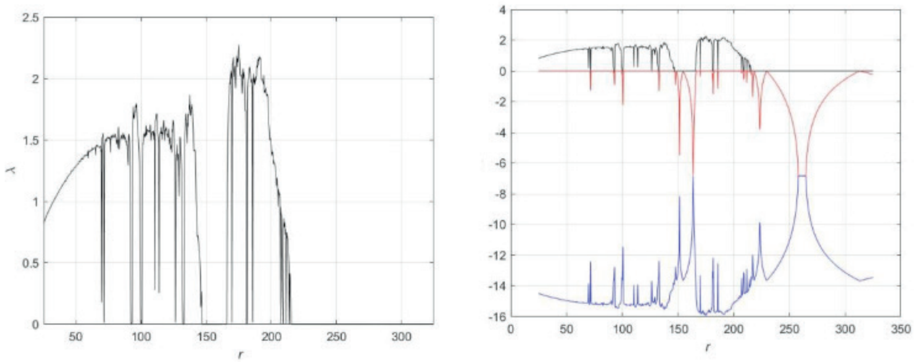


Figura 4. Plotagem do maior expoente de Lyapunov à esquerda e espectro de Lyapunov à direita. Para a geração dos gráficos foram considerados 1000 valores de parâmetros e simulados até t = 5000.

Analisando o gráfico do maior expoente de Lyapunov é possível verificar que o valor desse expoente é positivo para r = 28 indicando que o comportamento do sistema é caótico, isso está condizente com a análise do diagrama de bifurcação. A partir de r = 69,7 o expoente de Lyapunov passa a indicar a presença de janelas de periodicidade quando este cai rapidamente para zero e volta a ser positivo. Assim é possível diferenciar o comportamento caótico, quando o maior expoente de Lyapunov é positivo, de quando este é periódico, o maior expoente de Lyapunov é nulo.

Analisando o espectro de Lyapunov é possível verificar que o comportamento caótico ocorre quando os expoentes de Lyapunov assumem a ordem (+,0,-) e que os comportamentos periódicos são do tipo ciclo limite, uma vez que os expoentes são (0,-,-), aproximadamente.

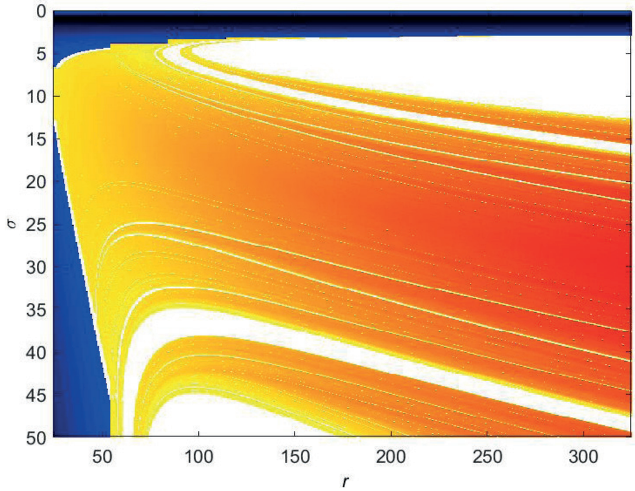


Figura 5. Espaço de parâmetros (r x σ) do sistema de Lorenz. Aqui a cor azul foi designada para quando os maiores expoentes de Lyapunov são negativos (λ < 0), a cor branca para quando λ ≈ 0 e amarelo e vermelho para λ > 0. Sendo vermelho utilizado para marcar os maiores expoentes de Lyapunov encontrados.

Com base no espaço de parâmetros do sistema de Lorenz, figura 5, percebe-se a complexidade dinâmica do sistema, uma vez que ele mostra que o sistema pode adquirir dinâmica periódica, quasi-periódica e também caótica dependendo do par de parâmetros r e σ. Além disso, a dinâmica é sensível à mudança desses dois parâmetros nos limites das estruturas periódicas imersas no comportamento caótico.

Uma análise similar foi realizada com o sistema de Rössler. O sistema de Rössler foi inicialmente desenvolvido para gerar um atrator com características semelhantes ao atrator de Lorenz. As equações que definem o sistema são:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + cy \\ \frac{dz}{dt} = b + (x - a).z \end{cases} \quad (4)$$

Inicialmente foi avaliado a estrutura do atrator de Rössler. Para isso o sistema de Rössler foi solucionado numericamente para as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0.01)$ e parâmetros iniciais $(a, b, c) = (15, 0.1, 0.1)$.

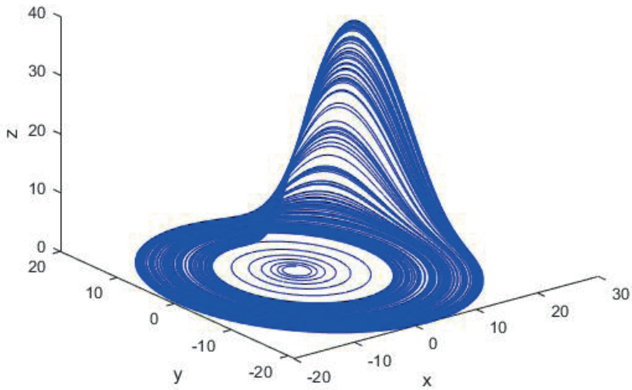


Figura 6. Plotagem tridimensional do espaço de fase do atrator de Rössler para as condições iniciais $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0.01)$ e parâmetros iniciais $(a, b, c) = (15, 0.1, 0.1)$

Para analisar melhor o problema foi gerado a figura 7, na qual variamos o parâmetro. Para cada valor de foi construído o gráfico do atrator. Uma variedade de tipos de atratores é visualizada indicando que esse sistema apresenta uma dinâmica interessante. Inicialmente começamos com uma órbita periódica de período simples, 1 loop, e quando o valor do parâmetro é aumentado percebe-se que os atratores tornam-se cada vez mais complexos. Essa variedade de comportamentos dinâmicos pode ser visto e identificado no diagrama de bifurcação, o qual fornece uma visão mais geral desses fenômenos.

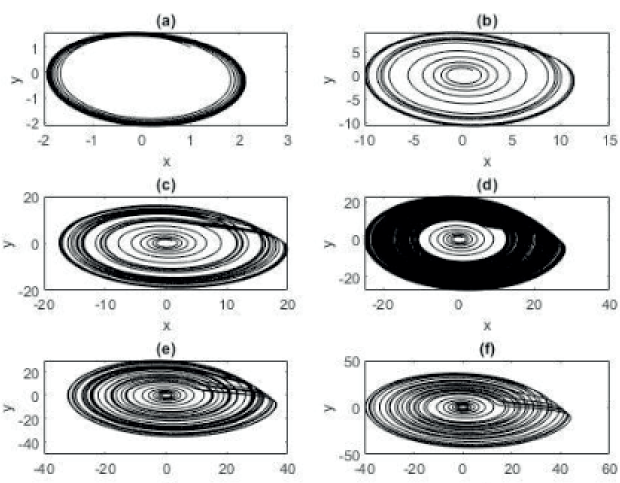


Figura 7. Atratores de Rössler gerados para vários valores de *a*. (a) *a*=1; (b) *a*=6.75; (c) *a*=12.5; (d) *a*=18.25; (e) *a*=24; (f) *a*=29.75.

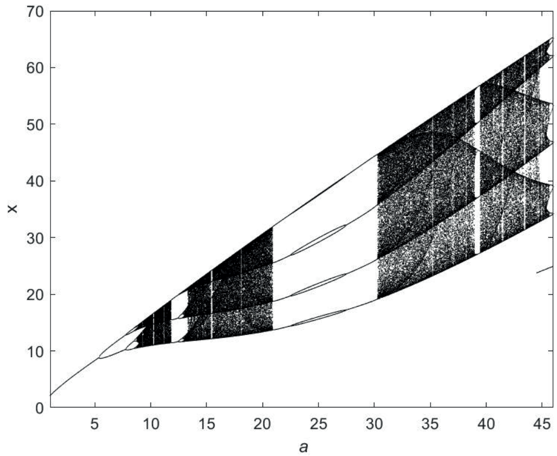


Figura 8. Diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler para $1 \leq a \leq 46$.

A figura 8 mostra o diagrama de bifurcação para o sistema de Rössler. Os parâmetros *b* e *c* são fixados enquanto o parâmetro a é variado. Para cada valor de na vertical foi plotado o máximo local da variável x da solução. Analisando o diagrama de bifurcação da esquerda para a direita verificamos a existência de uma órbita de período-1 no intervalo $1 \leq a \leq 5{,}275$ e quando o valor do parâmetro de controle é aumentado esse ramo sofre uma bifurcação do tipo duplicação de período implicando no surgimento de órbitas de período-2. Aumentando-se ainda mais o parâmetro, os ramos resultantes sofrem incontáveis duplicações de período, verificamos a presença de uma cascata de duplicação de período.

O resultado disso é o surgimento de um comportamento caótico. No intervalo $11{,}84 \ll a \ll 12{,}88$ existe uma janela periódica com atratores de período-3. O ramo do diagrama de bifurcação nessa janela dobra de período sucessivas vezes até gerar novamente uma faixa de parâmetros em que o comportamento do sistema é caótico. Outra janela periódica muito notável do sistema encontra-se em $20{,}93 \leq a \leq 35{,}79$, onde os atratores são de período-4 e duplicam em $a = 26{,}87$ gerando atratores de período-8. Ao final do diagrama de bifurcação o regime caótico torna-se periódico e o período dos atratores é diminuído por duplicações de período reversas.

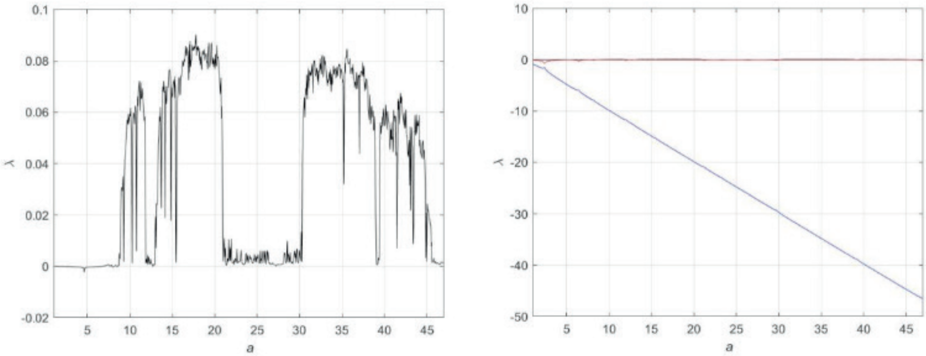


Figura 9. À esquerda maior expoente de Lyapunov e à direita encontra-se o espectro de Lyapunov para o sistema de Rössler com parâmetros no intervalo $1 \leq a \leq 46$.

Da mesma forma que foi feita para o modelo de Lorenz iremos comparar os resultados dos expoentes de Lyapunov com o diagrama de bifurcação. Com base na análise dos expoentes de Lyapunov podemos verificar que em $1 \leq a \leq$ 8,705 o comportamento do sistema é periódico com o maior expoente de Lyapunov próximo de zero.

Para $11{,}87 \leq a \leq 12{,}90$ o maior de Lyapunov torna-se próximo de zero novamente indicando uma região de janela periódica, isso ocorre também no intervalo verificado no diagrama de bifurcação $20{,}93 \leq a \leq 35{,}79$, o expoente para valores mais próximos de zero indicando a presença de órbitas periódicas estáveis. É interessante notar que essa região apresentou uma quantidade mais significativa de “ruídos” no gráfico o que é proveniente de uma dificuldade maior na convergência dos expoentes de Lyapunov nessa região de parâmetros.

Analisando o espectro de Lyapunov é possível verificar que o terceiro expoente de Lyapunov decresce cada vez mais, enquanto o primeiro (maior) e o segundo valores de Expoente de Lyapunov sempre permanecem próximos. Caos é definido quando a relação entre os expoentes assume (+,0,-).

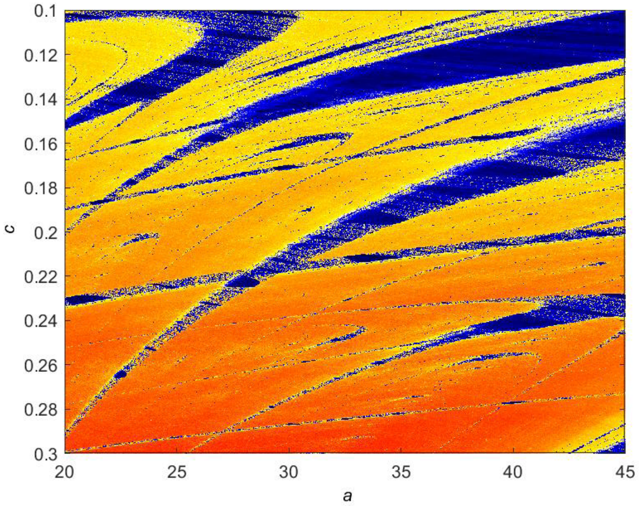


Figura 10. Espaço de parâmetros (a x c) do sistema de Rössler. Aqui a cor azul foi designada para quando os maiores expoentes de Lyapunov são quase nulos ($\lambda \approx 0$) e amarelo e vermelho para $\lambda > 0$. Sendo vermelho utilizado para marcar os maiores expoentes de Lyapunov encontrados.

Com base na figura 10 percebe-se a complexidade dinâmica do sistema de Rössler, uma vez que ela mostra que o sistema pode adquirir dinâmica periódica ou caótica dependendo dos valores de parâmetros adotados e o sistema é sensível às condições de parâmetros nos limites das estruturas periódicas e complexas identificadas. Essas estruturas complexas embutidas no mar de Caos são denominadas de camarões (*shrimps*).

4 I CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi constatada a complexidade inerente de sistemas de tempo contínuo por intermédio de um estudo teórico detalhado sobre a dinâmica dos sistemas de Lorenz e Rössler tridimensional. As simulações mostraram que o comportamento não linear pode implicar em uma gama muito diversificada de comportamentos para esses sistemas que inclui estados de oscilações periódicas e caos.

Através dos diagramas de bifurcação mostrou-se como os sistemas possuem uma quantidade imensa de comportamentos possíveis para determinado valor do parâmetro de controle. Foi possível identificar as regiões de caos dos sistemas, as rotas para o caos, e como são formadas as regiões periódicas imersas em regiões caóticas - janelas periódicas.

REFERÊNCIAS

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T.D.; YORKE, J.A. (1996). *Chaos - An Introduction to Dynamical Systems.* (1. ed.). Velarg New York, Spring.

Galdino, V. (2018). *TÉCNICAS PARA ESTIMAÇÃO DE EXPOENTE DE LYAPUNOV EM SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES.* Dissertação, Universidade Federal da Paraíba.

HOFF, A. (2014). *ESTRUTURAS DE BIFURCAÇÃO EM SISTEMAS DINÂMICOS QUADRIDIMENSIONAIS .* Dissertação, UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC , CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT .

SEYDEL, R. (2010). *Practical Bifurcation and Stability Analysis* (3 ed., Vol. 5). Nova York: Springer.

THORTON, S,T.; MARION, J.B.;. (2004). *Classical Dynamics of Particles and Systems* (5.Ed ed.).

WIGGINS, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Nova York: Springer.

WOLF, A. et al. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D, v.16*.

YANG, W.Y. et al. (2005). *Applied Numerical Methods Using MATLAB.*

CAPÍTULO 24

UMA INTRODUÇÃO A DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Data de aceite: 17/02/2021

Fernando Santos Silva
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Vitória da Conquista – BA
http://lattes.cnpq.br/1193461132432149

Ana Paula Perovano
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB
Vitória da Conquista – BA
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Rio Claro – SP
http://lattes.cnpq.br/8892821688981110

RESUMO: Neste texto, propomos uma nova definição de derivada Fuzzy do tipo local, denominada compatível Fuzzy. A definição é fundamentada na derivada de Khalil de ordem 0 <α<1, e baseada na diferença de Hukuhara. Estudamos suas propriedades e apresentamos a solução da equação diferencial de Malthus compatível com condição inicial Fuzzy. O estudo proposto estende o caso de equações diferenciais Fuzzy de ordem inteira.

PALAVRAS - CHAVE: Derivada compatível; Números Fuzzy; Diferença de Hukuhara;

ABSTRACT: In this text, we propose a new definition of a Fuzzy derivative of the local type, called Fuzzy compatible. The definition is based on the Khalil derivative of order 0 <α <1, and based on the Hukuhara difference. We study its properties and present the solution of the Malthus compatible differential equation with initial Fuzzy condition. The proposed study extends the case of Fuzzy differential equations of an entire order.

KEYWORDS: Compatible derivative; Fuzzy numbers; Hukuhara's Difference.

1 I INTRODUÇÃO

A definição de derivada como é conhecida hoje, deve-se a Augustin-Louis Cauchy que a apresentou por volta de 1823, como razão de variação infinitesimal. Nesse sentido, para ε o incremento de x, a derivada de uma função $y = f(x)$ com relação a x é o limite $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$, se esse limite existir (GUIDORIZZI, 2001).

Se uma função admite a derivada em um ponto, dizemos que ela é derivável nesse ponto. Observamos que um conceito chave para derivada é a diferença

$$f(x+\varepsilon) - f(x). \quad (1)$$

Além disso, ao longo da história do Cálculo Diferencial a forma com que expressamos as derivadas matematicamente constituem uma razão suficientemente forte para a sua própria generalização. Podemos nos referir a derivada de uma função f por:

- Notação de Lagrange: f',

- Notação de Euler: $\mathrm{D}f$,
- Notação de Newton: $\dot{f}$,
- Notação de Leibniz: $\frac{df}{dx}$.

As razões históricas para as notações acima incluem vantagens, desvantagens e escolhas pessoais. De forma semelhante, se para cada $n \in \mathbb{N}$, f for n vezes derivável, denotadas por

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right) = \frac{d^n f}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \mathrm{D}^n f(x).$$

O conhecimento do conceito de derivada ficou bastante tempo restrito a praticamente dois pequenos grupos de matemáticos: O grupo de sir Isaac Newton (Inglaterra) e o do barão Gottfried Wilhelm Von Leibniz (Alemanha). A notação de Leibniz é vantajosa, pois faz do Cálculo Diferencial um “Cálculo Operacional”.

Os irmãos Bernoulli propagaram por toda a Europa os símbolos e ideias de Leibniz para diversos matemáticos, dentre eles, o francês Guillaume François Antonie L’Hospital, mais conhecido como Marquês de L’Hospital. Em 1695, numa famosa carta, o Marquês pergunta a Leibniz o significado de $\frac{d^{\frac{1}{2}}f}{dx^{\frac{1}{2}}}$.

Segundo Camargo e Oliveira (2015), Leibniz profetizou: “Este aparente paradoxo permitirá, no futuro, extrair consequências interessantes.”

Em 1819, Lacroix consegue responder o questionamento do Marquês de L’Hospital para a função $f(x) = x^m$, com os seguintes passos:

1. Determinou a n-ésima derivada da f para com m e n inteiros positivos e: $m \geq n$
$\mathrm{D}^n x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$.

2. Substituiu m por $\Gamma(m+1)$ e $(m-n)!$ por $\Gamma(m-n+1)$, onde $\Gamma(.)$ é a

a função Gama (de Euler):

3. Por último, substituindo n por $\alpha \in (0,1)$, m por um número β real positivo qualquer e supondo $x > 0$:
$\mathrm{D}^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}$.

4. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = 1$, temos $\mathrm{D}^{0.5} x = \sqrt{\frac{4x}{\pi}}$.

O cálculo da ordem não inteira chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent, Hardy, Littlewood,

Erdèlyi, Kober, Caputo entre outros (CAMARGO, OLIVEIRA, 2015).

Recentemente Khalil et al. (2014) propôs chamada de derivada compatível de ordem $\alpha, 0 < \alpha \leq 1$. Em sua proposta, modificou a diferença da Equação (1) por $f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)$Seu objetivo foi de generalizar as propriedades clássicas do cálculo clássico. A derivada local compatível de ordem a, sendo $0 < \alpha \leq 1$, de uma função f é dada por,

$$\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}, \tag{2}$$

para todo $x > 0$. Consequentemente, a derivada conformável satisfaz quase todas as propriedades da derivada clássicas. Essa derivada tem sido utilizada em aplicações envolvendo mecânica de Newton (CHUNG, 2015), equação do calor (EROGLU, AVCI, OZDEMIR, 2017) e, usada na solução de equação diferencial não linear com condição inicial (SILVA, MOREIRA, MORET, 2018).

Uma equação diferencial é uma equação que envolve derivadas. Para Guidorizzi (2001) as equações diferenciais ordinárias conhecidas simplesmente por: Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem são da forma $F(x, y, y') = 0$, mas geralmente por meio de simples manipulação algébrica é possível reescrever na forma de uma ou mais equações $y' = f(x, y)$. No entanto, a modelagem de fenômenos reais por meio de sistema de equações diferenciais determinísticas $y' = f(x, y)$ quase sempre está incompleta. Por exemplo, o valor inicial pode não ser exatamente conhecido. Em geral, ele é estimado utilizando alguma medida e pode estar sujeito a erros.

Os números Fuzzy são um subconjunto do conjunto dos números reais, quantificando a imprecisão associada uma dada informação e representando valores incertos. Todos os números Fuzzy estão relacionados a graus de pertinência que expressam o quanto é verdadeiro dizer se algo pertence ou não a um determinado conjunto.

Nestas situações, em vez de trabalhar com números reais, podemos considerar um número Fuzzy que representa “aproximadamente” ou “em torno de”. A aritmética Fuzzy pode ser considerada como uma extensão dos números reais e, também de sua aritmética.

Existem diferentes tipos de números Fuzzy, mas, para fins simplicidade vamos trabalhar com os números Fuzzy triangulares. Além disso, as conversões desses números Fuzzy em relação ao conceito de intervalos também são incorporadas.

Existem várias formas de estender a noção de derivada no contexto Fuzzy. Uma das primeiras generalizações foi obtida por Puri e Ralescu (1983) que é baseada na noção da diferença de Hukuhara. Posteriormente, Kaleva (1987) usa esta noção para desenvolver uma teoria de equações diferenciais Fuzzy.

Neste trabalho apresentamos a derivada compatível de uma função a valores Fuzzy, demonstramos algumas propriedades e apresentamos exemplos ilustrativos.

Definição 1.1 (Khalil et al., 2014) Sejam $t \in \mathbb{R}$ e f uma função real. Observemos pela definição acima que se f for diferenciável então $\mathcal{D}^{\alpha} f(x) = x^{\alpha-1} f'(x)$.

2 I CONCEITOS BÁSICOS

Zadeh (1965) publicou o primeiro artigo sobre teoria dos conjuntos Fuzzy. Esta teoria caracteriza qualquer conjunto clássico por uma função de pertinência generalizada. Neste artigo, o autor define conjunto Fuzzy como uma classe de objetos com um grau de pertinência contínuo.

Um número Fuzzy A é um subconjunto Fuzzy de $\mathbb{R}$ com uma função de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \to [0,1]$ semi-contínua superiormente, Fuzzy convexa, normal e com suporte compacto. Em particular, $\mu_A(x) = 1$ e $\mu_A(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência e não pertinência do elemento x em A.

A família de todos os números Fuzzy será denotada por $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Os r-níveis do número Fuzzy A são intervalos limitados e fechados, podendo ser denotados da seguinte maneira: $[A]_r = [a_r^-, a_r^+]$, para todo $r \in [0,1]$. O nível zero de um subconjunto Fuzzy A é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de $\mathbb{R}$ que contém o conjunto suporte de A. Quando $r = 1$ dizemos $[A]_1$ é o núcleo de A.

A função de pertinência não é função densidade de probabilidade, mas sim uma medida de compatibilidade entre o objeto e o conceito representado pelo conjunto Fuzzy. Não existem regras definitivas para a escolha dessas funções na literatura. Aplicações muito sensíveis à escolha das funções de pertinência são, em geral, não adequadas para modelagem Fuzzy. Em muitos casos práticos as funções simples são convenientes, sendo as mais comuns com formato no plano cartesiano de triângulos e trapézios.

Entre os mais conhecidos estão os números Fuzzy triangulares e os números Fuzzy trapezoidais. Conforme já apontamos anteriormente, neste trabalho usaremos os números Fuzzy Triangulares. Na literatura é comum denotar a função de pertinência μ_A do número Fuzzy A simplesmente por A .

Um número Fuzzy A em $\mathbb{R}$ é chamado número Fuzzy triangular quando sua função de pertinência é dada por

$$A(x,a,b,c) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ \frac{x-c}{b-c}, & b \le x \le c \\ 0, & x \ge c \end{cases}.$$

Observe que para o valor de x igual a b o grau de pertinência do mesmo é igual a 1, o que caracteriza o número Fuzzy normalizado, e seu gráfico tem a forma de um

triângulo, tendo por base o intervalo $[a,c]$ e, como único vértice fora da base, o ponto $(b,1)$. Denotaremos um número Fuzzy triangular pelo terno (a,b,c).

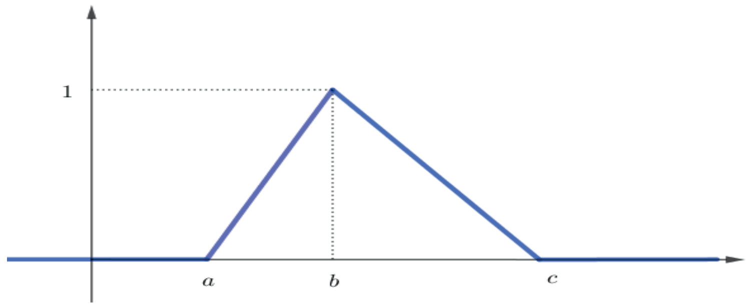


Figura 1: Estrutura do Número Triangular Fuzzy (a,b,c)

Fonte: Elaborada pelos autores.

A forma paramétrica de um número Fuzzy é representada por $[A]_r = [a + r(c-a), b + r(c-b)]$.

As seguintes operações aritméticas com números Fuzzy podem ser definidas baseadas no chamado Princípio da Extensão (DE BARROS, BASSANEZI, 2010): sejam dois números Fuzzy triangulares definidos por

$A_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $A_2 = (a_2, b_2, c_2)$

- **Adição**: $A_1 \oplus A_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$.
- **Produto**: $A_1 \odot A_2 = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2, c_1 \cdot c_2)$.
- **Produto por um número real**: $\lambda \odot A_1 = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot b_1, \lambda \cdot c_1)$.

Um conjunto básico de operações de Minkowski (SERRA, 1983), adição e multiplicação por escalar, podem ser definidas nos r-níveis para cada $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$[A]_r + [B]_r = \{a + b | a \in [A]_r, b \in [B]_r\} \text{ e } \lambda A = \{\lambda a | a \in [A]_r\}. \quad (3)$$

Se $\lambda = -1$, a multiplicação por escalar é chamada de oposta

$$-[A]_r := (-1)A = [-a_r^-, -a_r^+]. \quad (4)$$

Em geral, $[A]_r - [A]_r \neq \{0\}$, isto é, o oposto de $[A]_r$ não é o inverso de $[A]_r$ com respeito a adição de Minkowski. A diferença de Minkowski é dada por

$$[A]_r + (-1)[B]_r = [a_r^- - b_r^+, a_r^+ - b_r^-].$$

Exemplo 2.1 Sejam $A = [0,1]$ e $(-1)A = [-1,0]$. Por conseguinte, temos

$$A - (-1)A = [0,1] + [-1,0] = [-1,1]. \tag{5}$$

Portanto, o oposto de um conjunto não gera uma operação de diferença entre conjuntos.

O diâmetro de um número Fuzzy A é medido pelo fecho de seu suporte, isto é,

$$\mathrm{diam}\,(A) = \mathrm{diam}\,([A]_0) = a_0^+ - a_0^-. \tag{6}$$

Assim, quanto maior for o diâmetro de $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ mais Fuzzy ele é.

De acordo com o princípio de extensão de Zadeh para intervalos da reta podemos definir a soma e multiplicação por escalar em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, respectivamente, por

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \sup_{y+z=x} \min\{\mu_A(y), \mu_(z)\} \tag{7}$$

e

$$\mu_{\lambda\odot A}(x) = \begin{cases} \mu_A(\frac{x}{\lambda}), & \lambda \neq 0 \\ \chi_{\{0\}}(x), & \lambda = 0, \end{cases} \tag{8}$$

onde $\chi\{0\}$ é a função característica de $\{0\}$.

Por meio dos r-níveis podemos relacionar as operações aritméticas para números fuzzy com as respectivas operações Minkowski:

$$[A \oplus B]_r = [A]_r + [B]_r, \quad [\lambda \odot A]_r = \lambda[A]_r, \quad \forall r \in [0,1]. \tag{9}$$

Observação 1. Vale ressaltar que $1 \odot A = A$, $A \oplus B = B \oplus A$ e $\lambda \odot A = A \odot \lambda$.

Definição 2.2 Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. A métrica de Pompeiu-Hausdorff $d_H : \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \times \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, é definida por

$$d_H(A,B) = \sup_{0\leq r\leq 1} \max\{|a_r^- - b_r^-|, |a_r^+ - b_r^+|\}, \tag{10}$$

sendo $[A]_r = [a_r^-, a_r^+]$ e $[B]_r = [b_r^-, b_r^+]$.

Teorema 2.3 (Dimond, Kloedem, 2000) Dados $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

1. O par $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, d_\infty)$ é um espaço métrico completo, separável e localmente compacto;
2. $d_H(A \oplus B, B \oplus C) = d_H(A, B)$;
3. $d_H(\lambda \odot A, \lambda \odot B) = |\lambda| d_H(A, B)$;
4. $d_H(A \oplus B, C \oplus D) \leq d_H(A, C) + d_H(B, D)$.

Teorema 2.4 (Anastassiou, 2001) Valem as seguintes propriedades:

I. Se $\widetilde{0} = \chi_{\{0\}}$, então $\widetilde{0} \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é um elemento neutro com respeito a adição de números Fuzzy, isto é, $A \oplus \widetilde{0} = \widetilde{0} \oplus A = A$, para todo $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

II. Com respeito ao elemento $\widetilde{0}$, nenhum elemento de $\mathbb{R}_{\mathcal{F}} \setminus \mathbb{R}$ tem oposto em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$

III. Sejam $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \cdot b \geq 0$, temos $(a + b) \odot A = a \odot A \oplus b \odot A$

IV. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ temos $\lambda \odot (A \oplus B) = \lambda \odot A \oplus \lambda \odot B$.

V. Para todo $\lambda, \beta \in$ e $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ temos $\lambda \odot (\beta \odot A) = (\lambda \cdot \beta) \odot A$.

VI. Sejam $a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ e $A \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Então $d_H(a \odot A, b \odot A) \leq |a - b| \cdot d_H(A, \widetilde{0})$.

VII. A aplicação $||A||_{\mathcal{F}} = d_H(A, \widetilde{0})$ tem as propriedades de uma norma em $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$.

Observação 2 Convém destacar que a tripla $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \oplus, \odot)$ não é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e, consequentemente, $(\mathbb{R}_{\mathcal{F}}, \oplus, \odot)$ não é um espaço normado.

Definição 2.5 (Diferença de Hukuhara) Sejam $A, B \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Se existe $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $A = B \oplus C$, então C é chamado de H-diferença de A e B, denotada por $A \ominus_H B$. Se existe $C \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que $A = B \oplus C$, então C é chamado de H -diferença de A e B , denotada por $A \ominus_H B$.

Observação 3 A diferença de Hukuhara nem sempre existe, por exemplo $\{0\} \ominus_H [0, 1]$. Além disso, $A \ominus_H B \neq A \oplus (-1) \odot B$.

Teorema 2.6 (Angulo-Castillo, 2015) Sejam $A, B, C, D \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. Então,

1. $A \ominus_H A = \{0\}$.
2. $(A \oplus B) \ominus_H B = A$.
3. Se $A \ominus_H B = C$ existe, C é único.
4. Se $\beta \leq \lambda$, $(\lambda - \beta) \odot A = (\lambda \odot A) \ominus_H (\beta \odot A)$.
5. $\beta \odot (A \ominus_H B) = (\beta \odot A) \ominus_H (\beta \odot B)$ sempre que $A \ominus_H B$ exista.

Definição 2.7 Uma função com valores a números Fuzzy, ou simplesmente uma função Fuzzy, é a aplicação $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, isto é, para cada número real $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ associamos um número Fuzzy $f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Quando nos referirmos a funções Fuzzy

contínuas significa continuidade em relação a métrica d_∞.

Para cada $x \in \Omega$, denotamos os r -níveis da função Fuzzy f por

$$[f(x)]_r = [f_r^-(x), f_r^+(x)],\ \forall r \in [0,1]. \tag{11}$$

Dessa forma, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é representada por duas funções $f_r^-, f_r^+\colon \Omega \to \mathbb{R}$, para cada r.

Definição 2.8 Uma função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é Hukuhara diferenciável (H -diferenciável) em $x_0 > 0$ se os limites

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)}{h} \text{ e } \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus_H f(x_0+h)}{h}. \tag{12}$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ na métrica d_H. O número Fuzzy $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ é chamado de H-derivada de f em x_0.

Definição 2.9 Sejam $\alpha \in (0,1]$ e $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função. A aplicação f é αH-diferenciável em $x > 0$ se existir um elemento $\mathcal{D}_H f(x_0) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$, tal que para todo $h > 0$ suficientemente pequeno, $\exists\, f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)$ e $f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})$ e vale o limite (na métrica d_H)

$$lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})}{h} = \mathcal{D}_H^\alpha f(x). \tag{13}$$

Definição 2.10 (Compatível Fuzzy) Sejam $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0,1]$. A derivada Compatível Fuzzy de ordem α da função f em $x > 0$ é definida por $x > 0$ é definida por

1. Existe um elemento $\mathcal{D}_H^\alpha f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})}{h}.$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$.

2. Existe um elemento $\mathcal{D}_H^\alpha f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ tal que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x) \ominus_H f(x+hx^{1-\alpha})}{h}$$

existem e são iguais a $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$. O número Fuzzy $\mathcal{D}_H^\alpha f(x)$ é chamado de derivada H-compatível de f em x .

3 I DERIVADA FUZZY COMPATÍVEL

Teorema 3.1 Sejam $0 < \alpha \leq 1$ e $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ uma função αH-diferenciável, com r níveis dados por $[f(x)]_r = [f_r^+(x), f_r^+(x)]$, $\forall r \in [0,1]$. Então, $f_r^+(x)$ e $f_r^+(x)$ são α -diferenciáveis tais que

1. no primeiro caso: $[\mathcal{D}^\alpha f(x)]_r = [f_r^+(x), f_r^+(x)], \quad \forall r \in [0,1]$
2. no segundo caso: $[\mathcal{D}^\alpha f(x)]_r = [\mathcal{D}^\alpha f_r^+(x), \mathcal{D}^\alpha f_r^+(x)], \quad \forall r \in [0,1]$

Teorema 3.2 Sejam $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ e $\alpha \in (0,1]$. Se f e g são αH-diferenciáveis então $\mathcal{D}_H^\alpha (f+g)$ existe e $\mathcal{D}_H^\alpha (f+g) = \mathcal{D}_H^\alpha f \oplus \mathcal{D}_H^\alpha g$.

Demonstração. Seja $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $S_f = f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x)$ e $S_g = g(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H g(x)$ existam. Por definição obtemos $f(x + hx^{1-\alpha}) = S_f \oplus f(x)$ e $g(x + hx^{1-\alpha}) = S_g \oplus g(x)$. Utilizando novamente a diferença de Hukuhara, obtemos

$$(f \oplus g)(x + hx^{1-\alpha}) = S_f \oplus S_g \oplus (f \oplus g)(x),$$

isto é,

$$(f \oplus g)(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H (f \oplus g)(x) = S_f \oplus S_g.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d_H\left(\frac{S_f}{h} \oplus \frac{S_g}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x) \oplus \mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right) &= d_H\left(\frac{S_f}{h} \oplus \frac{S_g}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x) \oplus \mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right) \\ &\leq d_H\left(\frac{S_f}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha f(x)\right) + d_H\left(\frac{S_g}{h}, \mathcal{D}_H^\alpha g(x)\right). \end{aligned}$$

faça $h \to 0^+$ e obtemos o que queríamos. A outra parte da demonstração é análoga.

Teorema 3.3 Sejam $f : [0, \infty) \to$, $c \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0,1]$. Se f é αH-diferenciáveis então $\mathcal{D}_H^\alpha (c \odot f)$ existe e $\mathcal{D}_H^\alpha (c \odot f) = c \odot \mathcal{D}_H^\alpha f$.

Demonstração. Observe que

$$(c \odot f)(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H (c \odot f)(x) = c \odot f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H c \odot f(x).$$

Para $h > 0$ suficientemente pequeno tal que $S_f = f(x + hx^{1-\alpha}) \ominus_H f(x) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$. Temos por definição $f(x + hx^{1-\alpha}) = S_f \oplus f(x)$. Agora,

$$c \odot f(x + hx^{1-\alpha}) = c \odot (S_f \oplus f(x)).$$

Utilizando novamente a diferença de Hukuhara, obtemos
$c \odot f(x+hx^{1-\alpha}) \ominus_H c \odot f(x) = c \odot S_f.$

Para a equação

$$d_H\left(\frac{c\odot f(x+hx^{1-\alpha})\ominus_H c\odot f(x)}{h}, c\odot \mathcal{D}_H^{\alpha} f(x)\right) = d_H\left(\frac{c\odot S_f}{h}, c\odot \mathcal{D}_H^{\alpha} f(x)\right)$$

$$= |c| d_H\left(\frac{S_f}{h}, \mathcal{D}_H^{\alpha} f(x)\right)$$

faça $h \to 0^+$ na equação acima e obtemos o que queríamos. A outra parte da demonstração é análoga.

4 | MODELO DE MALTHUS-COMPATÍVEL COM CONDIÇÃO INICIAL FUZZY

No modelo compatível de crescimento populacional temos que a população aumenta exponencialmente conforme o tempo passa. Assim, considerando a condição inicial Fuzzy, obtemos o seguinte PVI Fuzzy

$\mathcal{D}_H^{\alpha} y(x) = kx \quad y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}},$

sendo $k \in \mathbb{R}_+^*$ a taxa de decrescimento intrínseca da população. Pelo Teorema 3.1, para α fixado, a solução do PVI com derivada compatível fuzzy é uma função $y_\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ com r -níveis $[y_\alpha(x)]_r = [y^-_{\alpha,r}(x), y^+_{\alpha,r}(x)]$, para $r \in [0,1]$, tal que

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha} y^-_{\alpha,r}(x) = k y^-_{\alpha,r}(x) \\ y(0) = y_0^- \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \mathcal{D}^{\alpha} y^+_{\alpha,r}(x) = k y^+_{\alpha,r}(x) \\ y(0) = y_0^+ \end{cases},$$

onde $[Y_0]_r = [y_0^-, y_0^+]$. A solução é dada por
$[y_\alpha(x)]_r = [y_0^- \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}, y_0^+ \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}] = e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}[Y_0]_r.$

Tomando $Y_0 = (a,b,c)$:

$$[y_\alpha(x)]_r = [(a + r(c-a)) \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}, (b + r(c-b)) \cdot e^{k\frac{t^\alpha}{\alpha}}]$$

Se considerarmos alguns parâmetros como por exemplo: a = 0,2, r = 0,a = 3,b = 4 e c = 5, teremos o gráfico representado pela Figura 2.

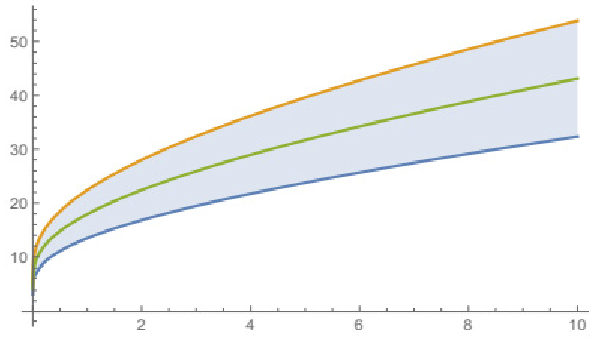


Figura 2: Representação gráfica da solução obtidas com os parâmetros a = 0,2, r = 0,a = 3,b = 4 e c = 5

Fonte: Elaborado pelos autores

Modificando um dos parâmetros teremos a Figura 3:

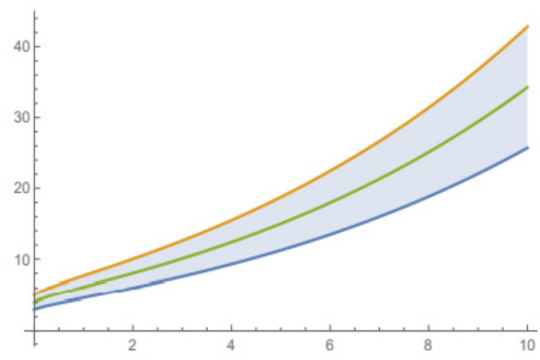


Figura 3: Representação gráfica da solução obtidas com os parâmetros a = 0,7, r = 0,a = 3,b = 4 e c = 5

Percebe-se que quando a tende a 1, a equação diferencial de Malthus compatível tende a equação diferencial de Malthus.

5 I CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma discussão sobre derivada compatível, munido da noção de diferenciabilidade Hukuhara, que forneceu uma única solução para a equação diferencial do modelo de Malthus compatível com condição inicial representada por números Fuzzy triangulares. Percebe-se facilmente que a solução encontrada define um

número Fuzzy para qualquer que seja. A derivada compatível pertence a uma classe de derivadas tais como Katugampola, M-derivada etc. Segundo alguns critérios na literatura elas não devem ser chamadas de derivadas fracionárias, no entanto, essa derivada tem sido utilizada com sucesso em aplicações envolvendo mecânica de Newton e usada na solução de equação diferencial não linear com condição inicial. Finalmente, trabalhos futuros podem se enquadrar na abordagem de outros tipos de generalizações da derivadas Hukuhara e as diversas definições das integrais Fuzzy associadas.

REFERÊNCIAS

ANASTASSIOU, G. A. and GAL, S. **On a fuzzy trigonometric approximation theorem of Weierstrass-type.** Journal of Fuzzy Mathematics, 9 (3), Los Angeles, 701–708, 2001.

ANGULO-CASTILLO, V. **Una aplicación de las funciones débilmente contractivas a problemas de valor en la frontera de funciones con valores en intervalos.** Revista Integración, 32(1), 27-37, 2014.

CAMARGO, R. F., OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário.** Livraria da Física, São Paulo, 2015.

DE BARROS, L. C., and SANTO PEDRO, F. **Fuzzy differential equations with interactive derivative.** Fuzzy sets and systems, 309, 64-80, 2017.

DE BARROS, L. C., BASSANEZI, R. C. **Tópicos de lógica fuzzy e biomatemática**. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC), Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), 2010.

DIMOND, P., KLOEDEM, P. **Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis**. In: Handbook fuzzy sets. 7, 583-641, 2000.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo.** v. 1, 5a. edição. Rio de Janeiro, LTC Editora, 2001.

KHALIL, R., HORANI, M. A., YOUSEF, A., SABABHEH, M. **A new definition of fractional derivative. Journal of Computational and Applied Mathematics.** 264, 65-70, 2014.

PURI, M. and RALESCU, D. **Differential and fuzzy functions.** J. Math.Anal. Appl. 91, 552–558, 1983.

SERRA, J. **Image analysis and mathematical morphology.** Academic Press, Inc., 1983.

SILVA, Fernando S.; MOREIRA, Davidson M.; MORET, Marcelo A. **Conformable Laplace transform of fractional differential equations.** Axioms, v. 7, n. 3, p. 55, 2018.

ZADEH, L. A. **Fuzzy Sets.** Information and Control, v. 8, p. 338-353, 1965.

CAPÍTULO 25

DISTRIBUIÇÃO DE NEWCOMB-BENFORD APLICADA À AUDITORIA DE CONTAS PÚBLICAS

Data de aceite: 17/02/2021

Thiago Schinda Bubniak
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Inácio Andruski-Guimarães
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

Sonia Maria de Freitas
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil

RESUMO: A auditoria é um processo necessário e previsto por lei para verificar as conformidades das atividades de uma empresa, instituição ou órgão público. Uma das principais finalidades das auditorias é a detecção de fraudes na demonstração de contas e resultados financeiros. Entretanto, o grande volume de contratos e o tempo requerido para a realização de uma auditoria, fazem com que apenas uma parte dos contratos seja analisada. Este trabalho apresenta a proposta de uma metodologia baseada na Distribuição, ou Lei, de Newcomb-Benford para auditoria de contas em uma autarquia federal. Para avaliar a eficiência da abordagem proposta a metodologia foi testada em uma amostra de contas referentes a contratos de obras já executadas e auditados. Os resultados obtidos, em termos de classificações corretas mostram que a metodologia proposta, além de eficaz, pode auxiliar a detecção de fraudes em qualquer fase da execução dos contratos de obras.

PALAVRAS-CHAVE: Auditoria de Contas. Distribuição de Newcomb-Benford. Detecção de Fraudes.

NEWCOMB-BENFORD'S DISTRIBUTION APPLIED TO PUBLIC ACCOUNT AUDITING

ABSTRACT: Auditing is a necessary and lawful process to verify the accordance of a company, institution or public agency. One of the main purpose of the audits is to detect fraud in the financial statements. however, the large NUMBER of contracts, as well the time required to perform an audit, prevent most contracts from being reviewed. this paper proposes a methodology based on newcomb-benford's law for auditing accounts in a federal agency. to evaluate the efficiency of the proposed approach, the methodology was tested on a sample of accounts relating to contratcts already executed and audited. the results, in terms of correct classifications, show that the proposed methodology, besides being effective, can help the fraud detection in any phase of the execution of the contracts.

KEYWORDS: Account Auditing. Newcomb-Benford's Distribution. Fraud Detection.

INTRODUÇÃO

A auditoria é o processo tomado para analisar as atividades desenvolvidas em uma empresa ou instituição afim de averiguar se os demais pontos como a contabilidade, os processos e a documentação estão conformes à lei e às regras estabelecidas previamente. A auditoria pública é exigida pela Constituição Federal, a qual determina que a fiscalização deve ser exercida pelo Congresso Nacional e por órgãos de controle interno.

As técnicas de auditoria podem mudar de acordo com o tipo de evidência que se está analisando. De acordo com Alvin *et al.* (2013), há três métodos de auditoria. A auditoria operacional, que tem como finalidade checar a eficiência e a efetividade de cada parte da organização e do órgão público. Para tal podem ser checados erros em relatórios e registro de folha de pagamentos. A auditoria de conformidade, cuja finalidade é verificar se a instituição está seguindo as leis e as regras previamente estabelecidas, para isso pode-se checar os registros de contratos e outros itens da empresa. Por fim há também a auditoria financeira, que tem o objetivo de se certificar da conformidade financeira da empresa. Neste caso as evidências podem ser obtidas através da conferência de cálculos, comparações e correlações, bem como extração e verificação de dados pelo auditor.

A aplicação das técnicas mencionadas pode demandar um tempo elevado, devido ao enorme volume de dados. Além disto há também o problema da seleção de amostras que devem ser auditadas. O método mais utilizado para esta finalidade é a Curva ABC, que seleciona as contas para auditoria com base nos montantes apresentados, fazendo com que apenas as contas com grandes montantes sejam selecionadas para auditoria. Outro problema com as metodologias citadas reside no fato de que as auditorias, especialmente no setor público, são realizadas apenas após a execução dos contratos, quando o tempo decorrido pode impossibilitar a demanda por reparações por parte da empresa afetada, tornando praticamente sem sentido a detecção da fraude.

Este trabalho propõe uma metodologia baseada na Lei, ou Distribuição, de Newcomb-Benford para auditoria de contas públicas a partir dos valores informados pelos contratos durante todas as fases de execução. O principal objetivo da metodologia proposta é possibilitar a detecção de fraudes, caso ocorram, no momento em que ocorrem, permitindo que reparação dos danos seja efetuada em um curto espaço de tempo, e de forma mais efetiva.

As aplicações da Lei de Newcomb-Benford incluem a detecção de fraudes contábeis, análise de dados macroeconômicos, detecção de fraudes em experimentos científicos e operações fraudulentas em mercados financeiros. O seu uso para detectar fraudes em relatórios de aplicações de verbas públicas foi sugerido por Varian (1972). A efetividade como indicador de fraude contábil foi demonstrada por Nigrini (2012). Também utilizando a distribuição, Müller (2011) mostrou que os dados macroeconômicos apresentados pela Grécia para pleitear o seu ingresso na Zona do Euro apresentavam fortes indícios de

manipulação.

MATERIAIS E MÉTODOS

A Lei de Newcomb-Benford, conhecida também como Lei, ou Distribuição, de Benford descreve um fenômeno observado primeiramente por Newcomb (1881), o qual notou que as páginas mais utilizadas nos livros para cálculo de logaritmos era as primeiras. Mais tarde, Benford (1938) analisou vários dados, tais como áreas de rios, população de cidades, entre outros, e então percebeu a tendência observada inicialmente por Newcomb, onde o dígito 1 aparece com uma maior frequência quando comparado com o dígito 2, e o 2 com uma maior frequência que o 3, e assim por diante, ao analisarmos o primeiro dígito destes dados. Este padrão foi nomeado de Lei de Newcomb-Benford, que estabelece que a probabilidade de um dígito d_1 ocorrer na primeira posição é dada por:

$$P(D_1 = d_1) = log\left(1 + \frac{1}{d_1}\right) \quad (1)$$

A probabilidade de que os dois primeiros dígitos sejam d_1 e d_2, respectivamente, é dada por:

$$P(D_1 D_2 = d_1 d_2) = log\left(1 + \frac{1}{d_1 d_2}\right) \quad (2)$$

A generalização da Distribuição de Benford para dígitos além da primeira posição, isto é, que o dígito d ocupe a n – ésima posição é dada por:

$$P(d \gg n) = \sum_{k=10^{n-2}}^{10^{n-1}-1} log\left(1 + \frac{1}{10k+d}\right) \quad (3)$$

Comparando-se as frequências observadas para cada dígito na primeira posição com as frequências esperadas pela Lei de Benford, caso haja uma discrepância significativa, há uma grande probabilidade de que os dados tenham sido fraudados, ou manipulados, embora esta comparação não seja suficiente para afirmar que eles foram efetivamente fraudados. Levando isto em conta, foram propostos dois testes estatísticos diferentes e que levam em conta as frequências esperada e observada para detectar a ocorrência de manipulação dos dados, um forte indicativo de fraude.

A tabela 1 mostra as probabilidades para todos os dígitos ocupando até a 4ª posição.

Posição no número				
Digito	1º	2ª	3ª	4ª
0		0.11968	0.10178	0.10018
1	0.30103	0.11389	0.10138	0.10014
2	0.17609	0.10882	0.10097	0.10010
3	0.12494	0.10433	0.10057	0.10006
4	0.09691	0.10031	0.10018	0.10002
5	0.07918	0.09668	0.09979	0.09998
6	0.06695	0.09337	0.09940	0.09994
7	0.05799	0.09035	0.09902	0.09990
8	0.05115	0.08757	0.09864	0.09986
9	0.04576	0.08500	0.09827	0.09982

Tabela 1 – Probabilidades de cada um dos dígitos ocuparem até a quarta posição

Fonte: Nigrini (1996).

O primeiro teste é proposto por Leemis (2000), que considera uma amostra de tamanho *n*, e utiliza o valor *m*, dado por:

$$m = \sqrt{n}.max_{i=1}^{9}\left\{\left|P(PDS = i) - log\left(1 + \frac{1}{i}\right)\right|\right\} \tag{4}$$

A Tabela 2 apresenta os valores críticos para diferentes níveis de significância.

Nível de Significância (α)	0,10	0,05	0,01
Valor Crítico	0,851	0,967	1,212

Tabela 2 – Valores críticos para o Teste de Leemis

O segundo teste, proposto por Cho e Gaines (2007), utiliza o valor d, dado por:

$$d = \sqrt{n.\sum_{i=1}^{9}\left[P(PDS = i) - log\left(1 + \frac{1}{i}\right)\right]^2} \tag{5}$$

Os valores críticos para o teste de Cho e Gaines, com 5% de significância, são dados na tabela 3.

Nível de Significância (α)	0,10	0,05	0,01
Valor Crítico	1,212	1,330	1,569

Tabela 3 – Valores críticos para o Teste de Cho e Gaines

Para avaliar a aplicabilidade, bem como a eficácia, da metodologia proposta foi utilizada uma amostra de contratos de execução de obras de infraestrutura, contratadas pelo DNIT - Departamento Nacional de Infraestrutura de Transportes. A amostra em questão contém dados de 20 contratos firmados no período de 2014 a 2019, todos executados e já auditados. Para obter os valores necessários à análise baseada na Lei de Newcomb-Benford foi implementado um algoritmo em linguagem *C/C++*, utilizando o ambiente de desenvolvimento *CodeBlocks* 17.12. Os valores de cada contrato foram analisados com a finalidade de comparar as frequências observadas para cada dígito na primeira posição com as frequências esperadas conforme a Distribuição de Newcomb-Benford. Na sequência, foram calculados os valores para os Testes de Leemis e de Cho e Gaines. A etapa seguinte foi a comparação dos resultados apresentados pelos referidos testes com aqueles apresentados pelas auditorias, a fim de medir o grau de concordância entre os resultados.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dos 20 contratos da amostra, a auditoria realizada pelo DNIT apontou irregularidades em 14, enquanto os seis restantes foram aprovados. Os valores apresentados pela Distribuição de Newcomb-Benford indicaram irregularidades para os mesmos 14 contratos. Entretanto, a distribuição também apontou irregularidades para um dos seis contratos aprovados. Para melhor avaliar a eficácia da distribuição, a Tabela 4 mostra a matriz de classificações, com as taxas aparentes de erro.

Auditorias Realizadas pelo DNIT	Testes com a Distribuição de Newcomb-Benford	
	Aprovadas	Rejeitadas
Aprovadas	0,83	0,17
Rejeitadas	0,00	1,00

Tabela 4 – Matriz de Classificações

Os valores apresentados na Tabela 4 atestam a eficácia da metodologia proposta, principalmente quando mostram a total concordância entre os resultados das auditorias

realizadas pelo DNIT e os que foram apresentados pela Distribuição de Newcomb-Benford no que se refere às contas rejeitadas. Vale ressaltar que os dados analisados constam de relatórios apresentados pelos contratados ainda na primeira fase da execução dos contratos. Com isto, é possível afirmar que, caso a abordagem aqui tratada tivesse sido adotada na época em que os documentos foram apresentados, as irregularidades teriam sido detectadas muito antes do processo final de auditoria.

CONCLUSÕES

Através dos resultados obtidos, pode-se afirmar que a metodologia proposta, baseada na Distribuição de Newcomb-Benford, é uma alternativa viável para a auditoria de contas em qualquer fase de execução de um contrato. No caso específico do material de estudo usado para este trabalho, a abordagem aqui proposta mostrou-se eficaz para a detecção de indícios de manipulação de dados.

Também cabe ressaltar que a aplicação da distribuição não demanda um tempo elevado, já que se concentra na análise dos números apresentados, enquanto a prática hoje adotada exige o exame de cada item apresentado e, adicionalmente, inspeções *in loco*, isto é, diretamente no canteiro de obras, não apenas exigindo mais tempo, mas também acarretando um considerável aumento de custos, devido aos deslocamentos necessários dos auditores. Outra vantagem reside na possibilidade de detectar possíveis irregularidades praticamente em tempo real, possibilitando maior agilidade na demanda por reparações.

REFERÊNCIAS

Alvin, A. A.; Randal, J. E.; Mark, S. Beasley; Auditing and Assurance Services: An Integrated Approach, 15. ed., Pearson Education Inc., 2013, p. 13 – 15.

Benford, F., The law of anomalous numbers. Proceedings of the American Philosophical Society, 78 (4), pp. 551-572 (1938).

Cho, W. K. T.; Gaines, B. J. Breaking the (Benford) law: Statistical fraud detection in campaign finance. *The American Statistician* 61 (3), 2007, p.218-223.

Leemis, L. M, Schmeister, B. W., Evans, D. L., Survival distributions satisfying Benford's law. *The American Statistician*, **54** (4), 2000, p. 236 – 241.

Müller, H. C., Greece Was Lying About Its Budget Numbers. **Forbes** 12. 2011**.**

Newcomb, S., Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers. American Journal of Mathematics, 4 (1), pp. 39-40 (1881)

Nigrini, M. A taxpayer compliance application of Benford's Law. *Journal of the American taxation association*, 18(1), 1996, p. 72-91

Nigrini, M., Benford's law: application for forensic accounting, and fraud detection, 2012.

Varian, H., Benford's Law (Letters to the editor). The American Statistician 26 (3) p. 65 1972.

CAPÍTULO 26

COMPARATIVE STUDY OF FOUR GENERALIZED PREDICTIVE CONTROLLERS FOR REFERENCE TRACKING AND DISTURBANCE ATTENUATION

Data de aceite: 17/02/2021

Data de submissão: 08/12/2020

Rejane de Barros Araújo
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará
Belém – Pará
http://lattes.cnpq.br/8760830024389437

Antonio Augusto Rodrigues Coelho
Universidade Federal de Santa Catarina
Florianópolis – Santa Catarina
http://lattes.cnpq.br/8788845630300277

ABSTRACT: The purpose of this paper is first to review the standard Generalized Predictive Controller (GPC) design, second, to establish a comparative study between the GPC with a prefilter $T_f(q^{-1})$, the GPC with a parameter of the future reference trajectory and the GPC that includes a positional model, but with an integral polynomial weighing factor for the error. Simulation results are shown and discussed.

KEYWORDS: predictive control, dynamic stability, control system design, reference tracking, disturbance attenuation.

ESTUDO COMPARATIVO DE QUATRO TIPOS DE CONTROLADORES PREDITIVOS GENERALIZADO PARA SEGUIMENTO DE REFERÊNCIA E REJEIÇÃO DE PERTURBAÇÃO

RESUMO: O objetivo deste artigo é primeiramente revisar o projeto do controlador preditivo generalizado (*Generalized Predictive Control* – GPC), posteriormente, fazer um estudo comparativo entre o GPC com pré-filtro $T_f(q^{-1})$, o GPC com um parâmetro de trajetória futura e o GPC que inclui um modelo posicional, mas com um fator de ponderação polynomial integral para o erro. Resultados de simulações são mostrados e discutidos.

PALAVRAS - CHAVE: controle preditivo, estabilidade dinâmica, projeto de sistemas de controle, rastreamento de referência, atenuação da perturbação.

1 I INTRODUCTION

The Generalized Predictive Controller (GPC) has been successfully implemented in several applications and is still under investigation (CLARKE et al., 1987; MAYNE, 2014). Over the last decades different design formalisms have been developed with the aim to guarantee closed-loop dynamic aspects like performance, stability, robustness, and input constraints.

The purpose of this paper is to review the standard GPC design of CLARKE (1987) and to establish a comparative study between T-GPC,

GPC with a filter $T_f(q^{-1}) \neq 1$ (ROSSITER, 2004), FR-GPC (Filter Reference GPC), GPC with a parameter of the future reference trajectory (SATO & INOUE, 2006) and FP-GPC (Filter Positional GPC), GPC that uses a positional model but with integral polynomial weighing factor for reference and output signals (ARAUJO et al., 2014).

The idea is to investigate how the GPC filtered affect the performance of the closed-loop system in terms of reference tracking, disturbance attenuation, stability, and robustness. Additionally, to show the capacity of the FP-GPC in dealing with reference tracking and disturbance rejection with very satisfactory performance between GPC controllers (standard GPC, T-GPC and FR-GPC). Numerical essay demonstrates the effectiveness of the GPC control algorithms and performance indicators are shown.

This paper is organized as follows. Sections 2, 3, 4 and 5 briefly presents each control design for the GPC, T-GPC, FR-GPC and FP-GPC, respectively. Section 6 describes a comparative study between the controllers, examining aspects such as transfer function, sensitivity function and control law. Section 7 shows a numerical simulation. Finally, conclusions are given in Section 8.

2 I STANDARD GPC DESIGN

The standard GPC design proposed in CLARKE et al. (1987) can be derived by the following discrete transfer function on the CARIMA model (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average):

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t-1) + T_f(q^{-1})\frac{e(t)}{\Delta} \quad (1)$$

where $y(t)$ is the process output, $u(t)$ is the control signal, $e(t)$ is the zero mean white noise, d is the dead-time, $T_f(q^{-1}) = 1$ and $(1 - q^{-1})$. The roots of the polynomials $A(q^{-1})$ and $B(q^{-1})$ are the open-loop poles and zeros, respectively.

The standard GPC control law is obtained by minimizing the cost function given by

$$J = \sum_{j=1}^{N_y} \delta[\hat{y}(t+j/t) - w(t+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_u} [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (2)$$

where $w(t)$ is the setpoint, δ and λ are error and control weighting, respectively, Ny is the output prediction horizon and Nu is the control horizon. From minimization of the cost function (2), the control law of the unconstrained GPC is described by

$$\Delta u(t) = K_{GPC}(w - f) = \sum_{j=1}^{N_y} k_j[w(t+j) - f(t+j)] \quad (3)$$

where K_{GPC} is the first row of the matrix $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$, f is the free response, w is the reference. Using the GPC design, defined in (3), then the RST canonical form of the controller is written as

$$R(q^{-1})\Delta u(t) = T(q^{-1})w(t) - S(q^{-1})y(t) \quad (4)$$

The equation (4) represents the polynomial control structure of two degree of freedom, where , $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ and $T(q^{-1})$ are polynomials and obtained from (3). The RST canonical form have filters in the reference represented by $T(q^{-1})$, in the output represented by $S(q^{-1})$ and in the error signal represented by $1/\Delta R(q^{-1})$ (LANDAU,1998). The block diagram of the RST structure from the GPC design is shown in Figure (1).

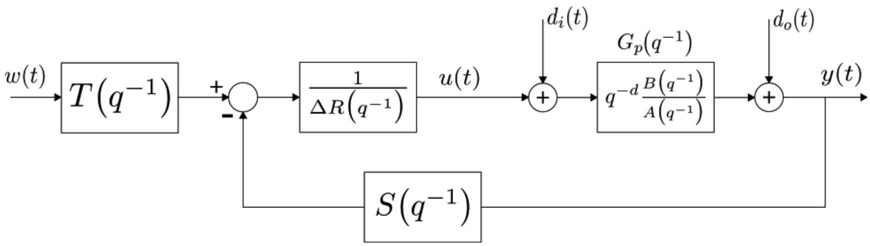


Figure 1: Polynomial RST control structure for GPC design.

3 I T-GPC DESIGN

Now, consider the equation (1) where $T_f(q^{-1})$ is a polynomial which implements a prefilter as follows $(1 - \beta q^{-1})$. The T-GPC control algorithm is obtained by minimizing the cost function of equation (2). The control law is equivalent from the standard GPC design (exhibits differences in the free response and GPC gain (K_{GPC}) and is calculated as follows:

$$\Delta u(t) = \tilde{K}_{GPC}(w - \tilde{f}) = \tilde{K}_{GPC}\left(w(t) - \frac{\tilde{F}_j(q^{-1})}{T_f(q^{-1})}y(t) - \frac{\tilde{H}_j(q^{-1})}{T_f(q^{-1})}\Delta u(t-1)\right) \quad (5)$$

Diophantine equations, for the T-GPC synthesis, are solved using $T_f(q^{-1}) = (1 - \beta q^{-1})$, then modifying the design matrices $\tilde{G}$, $\tilde{H}$, $\tilde{F}$ and, consequently, the polynomials $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$ and $T(q^{-1})$.

4 I FR-GPC DESIGN

Assuming equation (1) with $T_f(q^{-1}) = 1$, the FR-GPC control law is given by minimizing the cost function of equation (2), where the future reference $w(t + j)$ is calculated by the following equation (CLARKE et al.,1987; SATO & INOUE, 2006):

$$w(t) = y(t), \qquad w(t+j) = (1-\gamma)r(t) + \gamma w(t+j-1) \qquad (6)$$

where $0 \leq y < 1$ and $r(t)$ is the setpoint. To the future term $T(q^{-1})w(t+j)$ of the standard GPC law, the future reference is replaced by

$$w(t+j) = \gamma^j y(t) + \left(1-\gamma^j\right)r(t) \qquad (7)$$

Then, the future term can be represented as follows:

$$T(q^{-1})w(t+j) = t_r r(t) + t_y y(t),$$
$$t_r = \sum_{j=1}^{N_y}(1-\gamma^j)k_j, \qquad t_y = \sum_{j=1}^{N_y}\gamma^j k_j \qquad (8)$$

The FR-GPC control law is written as

$$\Delta u(t) = K_{GPC}\left(\left(1-\gamma^j\right)w - f - \gamma^j y\right) \qquad (9)$$

5 I FP-GPC DESIGN

Consider the deterministic CAR model (Controlled Auto-Regressive) of the controlled plant characterized by the following positional discrete transfer function:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-d}B(q^{-1})u(t-1) \qquad (10)$$

The GPC control law is obtained by minimizing the cost function of the form

$$J = \sum_{j=1}^{N_y}\left\{\phi_y(t+j) - \phi_w(t+j)\right\}^2 + \lambda\sum_{j=1}^{N_u}u^2(t+j-d-1) \qquad (11)$$

with $\phi_y(t+j)$ and $\phi_w(t+j)$ auxiliary output and reference variables and are defined as

$$\phi_y(t) = P(q^{-1})y(t) = \frac{K_\alpha \alpha(q^{-1})}{\Delta}y(t)$$
$$\phi_w(t) = P(q^{-1})w(t) = \frac{K_\alpha \alpha(q^{-1})}{\Delta}w(t) \qquad (12)$$

The term $\phi_y(t+j)$ is replaced by the estimated value with the equation (10) multiplied by $P(q^{-1})$ and it can be rewritten as

$$\Delta A(q^{-1})\phi_y(t+j) = K_\alpha \alpha(q^{-1})B(q^{-1})u(t+j-d-1) \quad (13)$$

Then, the minimization of the cost function of the FP-GPC for the unconstrained case, generates the control vector and is calculated by

$$u(t) = K_{GPC}\left[\Phi_w(t) - \Phi_f(t)\right] \quad (14)$$

which is the similar notation of the incremental GPC design proposed by CLARKE et al. (1987) for the incremental fixed structure. It is noteworthy that the FP-GPC design is an alternative synthesis to the standard formalism of the GPC and more details of the FP-GPC design can be found in ARAUJO et al. (2014).

6 I COMPARATIVE ANALYSIS OF GPC CONTROLLERS

This section shows a comparative study between standard GPC (CLARKE et al., 1987), T-GPC (ROSSITER, 2004; CAMACHO & BORDONS, 2004), FR-GPC (CLARKE et al., 1987; SATO & INOUE, 2006) and FP-GPC (ARAUJO et al., 2014) control algorithms, in order to evaluate the feasibility of these controllers regarding the performance and robustness to treat reference tracking, disturbance attenuation and model-plant mismatch.

The block diagram of Figure (1) can be used for analysis of the four controllers on the RST structure with changes on polynomials $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$, $T(q^{-1})$ for each controller. For the case of the T-GPC and FP-GPC there is the inclusion of the $T_f(q^{-1})$ and $K_\alpha \alpha(q^{-1})$ filters, respectively. Table (1) shows the design equations of the polynomials $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$, $T(q^{-1})$ for GPC controllers.

-	$R(q^{-1})$	$S(q^{-1})$	$T(q^{-1})$
GPC	$\left[1 + q^{-1}\sum_{j=1}^{N_y} k_j H_j\right]$	$\sum_{j=1}^{N_y} k_j F_j$	$\sum_{j=1}^{N_y} k_j q^j$
T-GPC	$\left[\frac{T_f(q^{-1}) + q^{-1}\sum_{j=1}^{N_y} k_j \tilde{H}_j(q^{-1})}{T_f(q^{-1})}\right]$	$\sum_{j=1}^{N_y} \frac{k_j \tilde{F}_j}{T_f(q^{-1})}$	$\sum_{j=1}^{N_y} k_j q^j$

FR-GPC	$\left[1+q^{-1}\sum_{j=1}^{N_y} k_j H_j\right]$	$\sum_{j=1}^{N_y} k_j\left(F_j-\gamma^j\right)$	$\sum_{j=1}^{N_y}\left(1-\gamma^j\right)k_j q^j$
FP-GPC	$\left[1+q^{-1}\sum_{j=1}^{N_y} k_j \bar{H}_j\right]$	$\sum_{j=1}^{N_y} k_j F_j K_\alpha \alpha(q^{-1})$	$\sum_{j=1}^{N_y} k_j q^j K_\alpha \alpha(q^{-1})$

Table 1: Comparative equations of standard GPC, T-GPC, FR-GPC and FP-GPC.

From the closed-loop transfer function, sensitivity function and control law, as shown in Table (2), it is possible to make the following observations:

-	Transfer Function
Standard GPC	$y(t)=\frac{T(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})+B(q^{-1})S(q^{-1})}w(t-d)$
	$\boldsymbol{S}=\frac{A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})+B(q^{-1})S(q^{-1})}$
	$u(t)=\frac{1}{\Delta R(q^{-1})}[T(q^{-1})w(t)-S(q^{-1})y(t)]$
T-GPC	$y(t)=\frac{T_f(q^{-1})B(q^{-1})T(q^{-1})}{[A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})+B(q^{-1})S(q^{-1})]T_f(q^{-1})}w(t-d)$
	$\boldsymbol{S}=\frac{A(q^{-1})\Delta\tilde{R}(q^{-1})}{[A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})+B(q^{-1})S(q^{-1})]T_f(q^{-1})}$
	$u(t)=\frac{T_f(q^{-1})}{\Delta\tilde{R}(q^{-1})}\left[T(q^{-1})w(t)-\frac{\tilde{S}(q^{-1})}{T_f(q^{-1})}y(t)\right]$
FR-GPC	$y(t)=\frac{T(q^{-1})B(q^{-1})t_r(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})+B(q^{-1})\left(S(q^{-1})-t_y(q^{-1})\right)}w(t-d)$
	$\boldsymbol{S}=\frac{A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta R(q^{-1})+B(q^{-1})\left(S(q^{-1})-t_y(q^{-1})\right)}$
	$u(t)=\frac{1}{\Delta R(q^{-1})}\left[t_r(q^{-1})w(t)-\left(S(q^{-1})-t_y(q^{-1})\right)y(t)\right]$
FP-GPC	$y(t)=\frac{K_\alpha\alpha(q^{-1})T(q^{-1})B(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta\bar{R}(q^{-1})+K_\alpha\alpha(q^{-1})B(q^{-1})S(q^{-1})}w(t-d)$
	$\boldsymbol{S}=\frac{A(q^{-1})\Delta\bar{R}(q^{-1})}{A(q^{-1})\Delta\bar{R}(q^{-1})+K_\alpha\alpha(q^{-1})B(q^{-1})S(q^{-1})}$
	$u(t)=\frac{K_\alpha\alpha(q^{-1})}{\Delta\bar{R}(q^{-1})}[T(q^{-1})w(t)-S(q^{-1})y(t)]$

Table 2: Comparative transfer functions of GPC, T-GPC, FR-GPC and FP-GPC.

T-GPC, FR-GPC and FP-GPC controllers are equivalent, but with different features, according to design filters $T_f(q^{-1})$, $t_y(q^{-1})$, $t_r(q^{-1})$ and $K_\alpha \alpha(q^{-1})$ for each control loop.

For the T-GPC case, the two degree of freedom structure can be exploited only for disturbance attenuation which depends on $T_f(q^{-1})$, however the reference tracking is affected by the calibration of the GPC parameters.

In the case of the FR-GPC and FP-GPC, both reference tracking and disturbance rejection can be exploited by the filters $t_y(q^{-1})$, $t_r(q^{-1})$ and $K_\alpha \alpha(q^{-1})$, respectively.

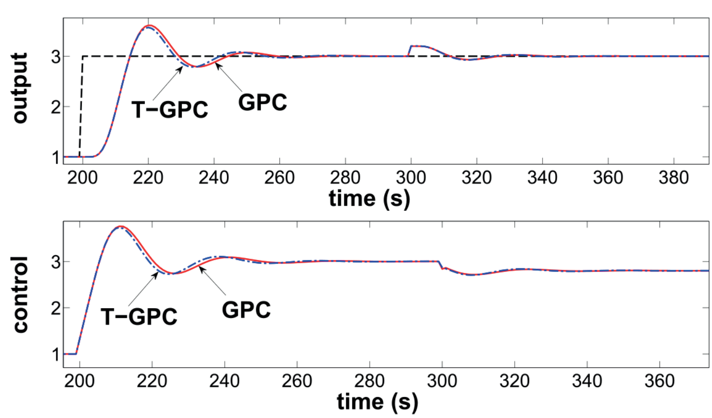
On the other hand, the prefilter $T_f(q^{-1})$ does not modify the closed-loop poles and control law in the T-GPC, however, $t_y(q^{-1})$ and $K_\alpha \alpha(q^{-1})$ changes the robustness, closed-loop stability and control law in FR-GPC and FP-GPC controller designs.

7 I SIMULATION RESULTS

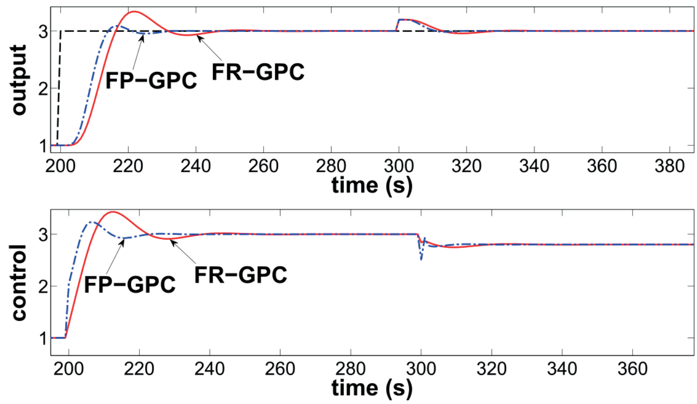
This essay is based on a numerical simulation of a multiple poles system described in SATO & INOUE (2006). Plant and model transfer functions are given by

$$G_p(s) = \frac{1}{(s+1)^8}, \qquad G_m(s) = \frac{0.007}{(s^2 + 0.73s + 0.1)} \tag{15}$$

Figure (2) shows the closed-loop responses for the GPC controllers, using step setpoint changes and a constant disturbance on the plant output (of the setpoint magnitude value at time t = 300 s). The controllers have equivalent dynamic behavior, but the FP-GPC has better reference tracking and disturbance attenuation performance than the other controllers with small control variance and low output oscillation. The tuning parameters of the controllers are N_y = 4, N_u = 4, λ = 4 and sampling period of 1 s.



Standard GPC and T-GPC



(b) FR-GPC and FP-GPC

Figure 2: System response to the GPC, T-GPC, FR-GPC and FP-GPC.

Filter tuning parameters of each controller are selected from different ways. For the T-GPC, the polynomial $T_f(q^{-1})$ is tuning using the guidelines suggested in ROSSITER (2004), where the time constant of the filter lies in the neighborhood of the dominant poles of $A(q^{-1})$. For the FR-GPC, the parameter is the same used in SATO & INOUE (2006). For the case of the FP-GPC, the filter parameters (K_α and $\alpha(q^{-1})$) are calibrated through a multi-objective optimization algorithm based on the sensitivity function and Integrated Absolute Error (IAE) criterion.

Table (3) shows the filter parameters for each GPC design and the performance indeces (IAE and TVC - Total Variation of Control) of the four controllers. We can observe that the FP-GPC performance is better than the other controllers (smaller values of IAE and TVC).

	Filter Values	**IAE**	**TVC**
Standard GPC	-	17.6382	9.1361
T-GPC	$T_f(q^{-1}) = (1 - 0.45q^{-1})$	17.2660	9.2079
FR-GPC	$\gamma = 0.69$	15.7137	6.5636
FP-GPC	$K_\alpha \alpha(q^{-1}) = 2.4375(1 - 0.7294q^{-1})$	**11.1863**	**6.4160**

Table 3: Tuning parameters and IAE, TVC criteria.

8 I CONCLUSIONS

This paper has investigated a comparative study between the standard GPC, T-GPC, FR-GPC and FP-GPC controllers, analyzing how the filter tuning parameters are affecting the performance of the closed-loop system, evaluating reference tracking, disturbance attenuation and stability conditions.

Initially, the paper briefly described the control design for the GPC, indicating the process model, cost function and control law, achieving the RST canonical form of the controller. Next, it was presented a comparative analyses of the polynomials $R(q^{-1})$, $S(q^{-1})$, $T(q^{-1})$ and the closed-loop transfer function, sensitivity function and control law for each controller, highlighting the influence of the filter design on the closed-loop polynomials and, consequently, on the performance and robustness of the system.

Finally, a numerical simulation was shown to a multiple poles system with model-plant mismatch to assess not only the stability, performance and robustness of GPC controllers for setpoint tracking and disturbance rejection, but also to demonstrate that the FP-GPC has performed best performance than the others GPC controllers.

REFERENCES

ARAÚJO, R. B.; JERONYMO, D. C.; COELHO, A. A. R. **Incremental and positional generalized predictive controller for offset free reference tracking**, Brazilian Congress of Automatic Control, Brazil, 2014.

CAMACHO, E. F.; BORDONS, C. **Model predictive control**, Springer-Verlag, London, 2004.

CLARKE, D. W; MOHTADI, C.; TUFFS, P. S. **Generalized predictive control - Part I: the basic algorithm**, Automatica, pp. 137-148, 1987.

LANDAU, I. D. **The RST digital controller design and applications**, Control Engineering Practice, pp. 155-165, 1998.

MAYNE, D. Q. **Model predictive control: recent developments and future promise**, Automatica, pp. 2967-2986, 2014.

ROSSITER, J. A. **Model-based predictive control: a practical approach**, CRC Press LLC, ISBN: 0-8493-1291-4, 2004.

SATO, T.; INOUE, A. **Improvement of tracking performance in self-tuning PID controller based on generalized predictive control**, International Journal of Innovative Computing, Information and Control, pp. 491-503, 2006.

SOBRE OS ORGANIZADORES

AMÉRICO JUNIOR NUNES DA SILVA - Professor do Departamento de Educação da Universidade do Estado da Bahia (Uneb - Campus VII) e docente permanente do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA (Uneb - Campus III). Doutor em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), Especialista em Psicopedagogia Institucional e Clínica pela Faculdade Regional de Filosofia, Ciências e Letras de Candeias (IESCFAC), Especialista em Educação Matemática e Licenciado em Matemática pelo Centro de Ensino Superior do Vale do São Francisco (CESVASF). Foi professor e diretor escolar na Educação Básica. Coordenou o curso de Licenciatura em Matemática e o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid) no Campus IX da Uneb. Foi coordenador adjunto, no estado da Bahia, dos programas Pró-Letramento e PNAIC (Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa). Participou, como formador, do PNAIC/UFSCar, ocorrido no Estado de São Paulo. Pesquisa na área de formação de professores que ensinam Matemática, Ludicidade e Narrativas. Integra o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/UFSCar), na condição de pesquisador, o Grupo Educação, Desenvolvimento e Profissionalização do Educador (CNPq/PPGESA-Uneb), na condição de vice-líder e o Laboratório de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (CNPq/LEPEM-Uneb) na condição de líder. É editor-chefe da Revista Baiana de Educação Matemática (RBEM) e coordenador do Encontro de Ludicidade e Educação Matemática (ELEM).

ANDRÉ RICARDO LUCA VIEIRA - Doutorando em Educação pela Universidade Federal do Sergipe - UFS/PPGED. Mestre em Educação de Jovens e Adultos pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB/MPEJA (2018), com Especialização em Tópicos Especiais de Matemática (2020), Ensino de Matemática (2018), Educação de Jovens e Adultos (2016), Matemática Financeira e Estatística (2015) e Gestão Escolar (2008). Licenciado em Matemática pela Universidade Nove de Julho (2000). Atualmente é professor efetivo do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão/PE. Coordenou o Curso de Licenciatura em Matemática pelo Plano Nacional de Formação dos Professores da Educação Básica - PARFOR pela Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus XVI - Irecê-BA. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Formação de Professores e Tecnologias da Informação e Comunicação - FOPTIC (UFS/CNPq). É editor assistente da Revista Baiana de Educação Matemática - RBEM, uma publicação do Programa de Pós-Graduação em Educação, Cultura e Territórios Semiáridos - PPGESA da Universidade do Estado da Bahia - UNEB, Campus III - Juazeiro/BA em parceria com o Campus VII - Senhor do Bonfim/BA da mesma instituição e com o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - IF Sertão-PE, Campus Santa Maria da Boa Vista/PE.

ÍNDICE REMISSIVO

A

B

C

D

E

F

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena Editora
Ano 2021

www.atenaeditora.com.br
contato@atenaeditora.com.br
@atenaeditora
www.facebook.com/atenaeditora.com.br

Incompletudes e Contradições para os Avanços da Pesquisa em Matemática 2

Atena
Editora
Ano 2021